

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

ВОСТОЧНО-КАЗАХСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Д.Серикбаева

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Конспект лекций

Усть-Каменогорск
2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	4
Введение.....	5
1. Структура плоских механизмов.....	6
1.1. Классификация плоских кинематических пар.....	6
1.2. Расчёт подвижности плоского механизма.....	8
1.3. Структурная классификация механизмов.....	9
1.4. Замена высших пар в плоских механизмах.....	12
1.5. Избыточные (повторяющиеся) связи и местные подвижности в механизмах.....	12
2. Кинематика зубчатых механизмов.....	14
2.1. Понятие о передаточном отношении.....	14
2.2. Передаточное отношение простой зубчатой передачи.....	15
2.3. Кинематика зубчатых механизмов с неподвижными осями колёс.....	16
2.4. Кинематика механизмов планетарного типа.....	18
3. Эвольвентное зубчатое зацепление.....	22
3.1. Основной закон зацепления.....	22
3.2. Эвольвента окружности, её свойства и уравнение.....	23
3.3. Элементы зубчатого колеса.....	25
3.4. Элементы и свойства эвольвентного зацепления.....	26
3.5. Методы изготовления зубчатых колёс.....	28
3.6. Геометрия реечного производящего исходного контура.....	29
3.7. Подрез зуба колеса и его предотвращение.....	31
3.8. Качественные характеристики эвольвентного зацепления.....	33
3.9. Назначение коэффициентов смещения для нарезания зубчатых колёс.....	37
3.10. Расчёт геометрических размеров зубчатых колёс.....	37
4. Кинематика механизмов с низшими кинематическими парами.....	41
4.1. Задачи исследования; исходные данные; методы исследования.....	41
4.2. Аналитический метод.....	42
4.3. Метод планов положений, скоростей и ускорений.....	43
4.4. Метод кинематических диаграмм (метод графического дифференцирования).....	46
5. Кинетостатика механизмов.....	47
5.1. Расчёт сил инерции.....	47
5.2. Общие положения силового расчёта механизмов.....	50
5.3. Метод планов сил для определения реакций в кинематических парах.....	51
5.4. Определение уравновешивающей силы способом Н.Е. Жуковского.....	53
6. Динамика машин.....	55
6.1. Вспомогательные задачи динамики машин.....	55
6.2. Характеристика режимов движения машин.....	57
6.3. Уравнения движения машин.....	59
6.4. Назначение и приближённое определение момента инерции маховика.....	60

Предисловие

Теория механизмов и машин (ТММ) излагает научные основы создания новых машин и механизмов, методы их построения и методы теоретического и экспериментального исследования. Из-за недостатка времени, отводимого на изучение этого курса в настоящее время, и требуемого объёма материала основное внимание данного пособия сосредоточено на необходимых понятиях механики машин (другое название дисциплины) и методах теоретического исследования механизмов и машин. Основой данного конспекта является курс, который автор читал в течение многих лет на различных факультетах ОмГТУ. Основной целью преподавания курса ТММ в настоящее время автор считает дать минимально необходимый объём знаний по механике машин для того, чтобы студент - машиностроитель понимал и успешно усваивал материал специальных предметов, которые ему придётся изучать на последующих курсах университета. К сожалению, из-за вышеуказанных причин в данном конспекте мало затрагиваются разделы, посвящённые проблемам синтеза механизмов, однако автор надеется, что студент, прочитав и усвоив содержание предлагаемого материала, сумеет в случае необходимости с привлечением других источников справиться с решением возникших перед ним задач проектирования механизмов.

Для упорядочения изложения материал разбит на разделы, пронумерованные арабскими цифрами. Внутри разделов имеются более мелкие рубрики (параграфы), которые имеют двойную нумерацию – первая цифра обозначает номер раздела, а вторая – номер рубрики внутри раздела. Внутри этих рубрик могут быть ещё более мелкие подразделения. Такого порядка автор придерживается и при чтении курса.

В конце каждого раздела приводится перечень вопросов для самопроверки. Это должно помочь студенту проверить, насколько глубоко он усвоил материал, и не требуется ли его повторить, а может быть и не один раз. В случае стойкого непонимания каких-либо моментов студент может обратиться за консультацией к преподавателю.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность студентке Любимцевой М.В., предоставившей ему свои записи лекций, и техническую помощь при оформлении материала.

Введение

Теория механизмов и машин (ТММ) изучает общие методы исследования и проектирования механизмов и машин.

Проблемы, которыми занимается ТММ, – это проблемы анализа и синтеза механизмов и машин. *Анализ* заключается в определении свойств существующих механизмов и машин. Это прямая задача механики машин. Обратная задача – *синтез механизмов*, т. е. создание новых механизмов, которые должны обладать улучшенными свойствами по сравнению с существующими с точки зрения производительности, надежности, долговечности и др.

Общее определение машины. Функциональная классификация машин. *Машина есть устройство, создаваемое человеком для использования законов природы с целью облегчения физического и умственного труда, увеличения его производительности путем частичной или полной замены человека в его трудовых и физиологических функциях.*

Все существующие машины можно разделить на следующие группы:

I. Энергетические. В них происходит преобразование энергии из одного вида в другой (например, электрогенераторы, электродвигатели, двигатели внутреннего сгорания любого типа, паровые и газовые турбины и т. д.).

II. Технологические. Они предназначены для изменения формы, размеров и физических свойств материалов (металлорежущие станки, деревообрабатывающие, дорожные, строительные, полиграфические машины, машины пищевых производств, машины текстильной и легкой промышленности и др.). Эти машины составляют самую многочисленную группу.

III. Транспортные. Эти машины служат для перемещения всевозможных изделий, материалов и людей (автомобили, самолёты, локомотивы, суда, подъемные краны, конвейеры, манипуляторы).

IV. Логические (информационные). Машины, составляющие эту группу, служат для хранения, переработки и передачи информации (различные вычислительные устройства, ЭВМ, компьютеры в том числе ПК).

V. Кибернетические. Для замены человека в его трудовых, и физиологических функциях (аппараты искусственное сердце, искусственные почки, робот-домохозяйка и др.).

ТММ изучает те машины и механизмы, которые функционируют на основе законов механики, отсюда другое название ТММ – *механика машин*.

Узкое определение машины. *Машина есть устройство, действующее на основе законов механики и предназначенное для преобразования энергии, материалов и информации и перемещения изделий.*

Машина, как правило, состоит из одного или нескольких *механизмов*, основное назначение которых – преобразование движения (с одновременным преобразованием сил). *Механизмом называется искусственно созданная система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемые движения других тел.*

Твердые тела в составе механизма – *звенья*. Неподвижное звено механизма называется *стойкой*. *Подвижное соединение двух звеньев, допускающее их относительное движение, называется кинематической парой*.

1. Структура плоских механизмов

Механизм называется *плоским*, если все его звенья движутся параллельно одной плоскости, и траектории всех его точек – плоские кривые. В противном случае механизм *пространственный*.

1.1 Классификация плоских кинематических пар

Классификация по числу условий связей

Из курса теоретической механики известно, что свободное твердое тело в пространстве имеет шесть степеней свободы (рис 1.1). Это три поступательных

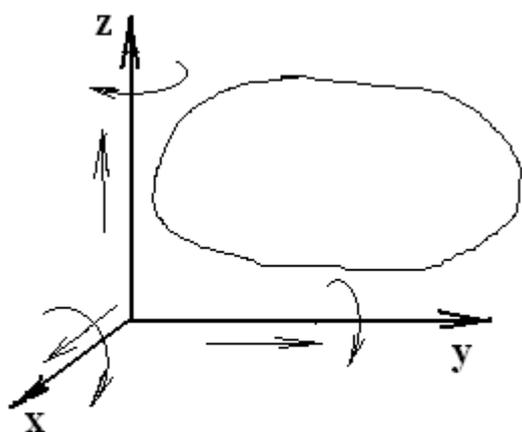


Рисунок 1.1

движения вдоль трёх осей координат и три вращательных движения вокруг этих осей. Можно также сказать, что на свободное твёрдое тело не наложено ни одной связи. Если обозначить число степеней свободы буквой H , а

число связей буквой S , то можно записать:

$$H = 6, \quad S = 0$$

При переходе из пространственной системы в плоскую твёрдое тело теряет три степени свободы, что означает, что на него наложено три связи. Так что свободное твёрдое тело в плоскости имеет $H = 3$ и $S = 3$. Например, тело, находящееся в координатной плоскости

XOY , может двигаться поступательно вдоль этих осей и вращаться вокруг оси, перпендикулярной плоскости XOY (рис 1.2).

В плоской кинематической паре количество ограничений в движении звена, называемых *условиями связей*, может быть или два, или одно.

В первом случае общее количество условий связей вместе с тремя потеря-

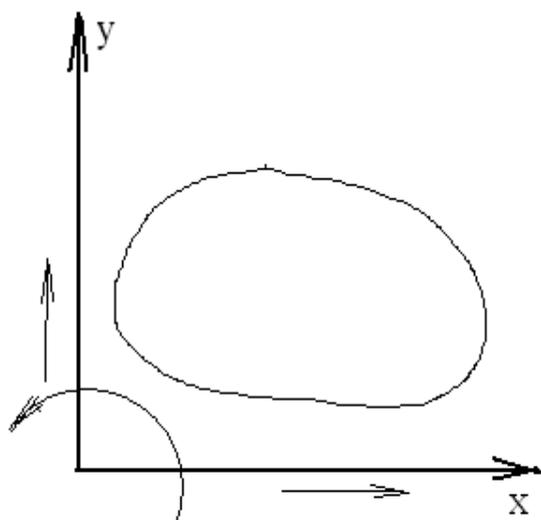


Рисунок 1.2

нными при переходе из пространства в плоскость составляет $S = 5$. Такая кинематическая пара в соответствии с числом S является *парой 5-го класса*, а так как в ней может выполняться только одно движение ($H = 1$), то эта пара называется также *одноподвижной кинематической парой*. Кинематические пары 5-го класса могут быть *вращательными* (рис. 1.3) и *поступательными* (рис. 1.4) в зависимости от характера относительного движения звеньев, реализуемого в ней. Возможные относительные движения звеньев в этих парах на указанных рисунках отмечены стрелками.

Во втором случае общее количество условий связей $S = 4$, и кинематическая пара является парой 4-го класса, а в соответствии с

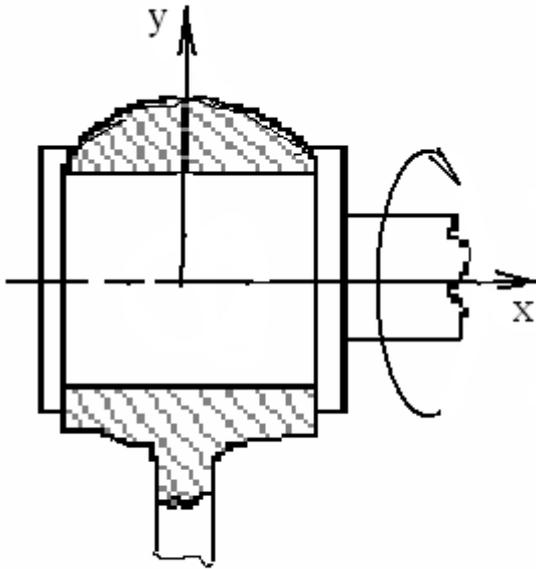


Рисунок 1.3

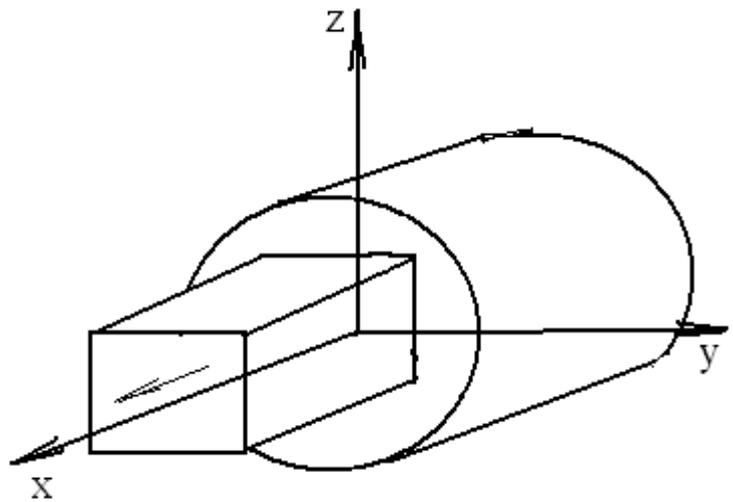


Рисунок 1.4

$H = 2$ она называется *двухподвижной кинематической парой* (рис. 1.5). Как видно из этого рисунка, пару 4-го класса в плоскости составляют две кривые 1 и 2, контактирующие друг с другом в точке А. Относительное движение звеньев этой пары возможно в направлении касательной $t-t$ (ось X) и вращение вокруг точки А. Невозможно движение вдоль нормали $n-n$ (ось Y).

Классификация по характеру касания элементов.

Элемент кинематической пары – это совокупность точек, линий или поверхностей, которыми данное звено входит в касание с другим звеном при образовании кинематической пары. Если касание элементов кинематической пары происходит по линии или в точке, то кинематическая пара *высшая* (пара 4-го класса), если касание происходит по поверхности, то кинематическая пара *низшая* (пара 5-го класса).

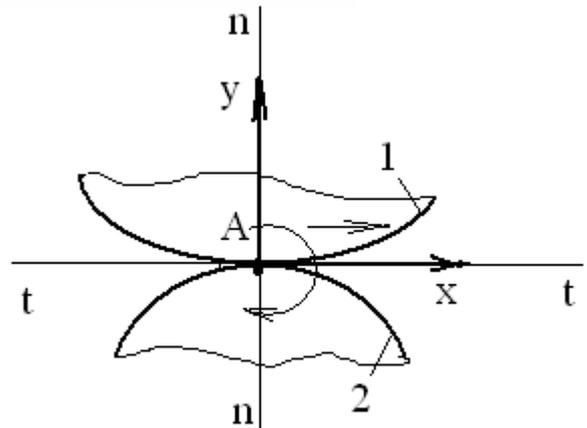


Рисунок 1.5

Механизмы с высшей кинематической парой передают меньшие нагрузки, но имеют малые потери на трение и легко проектируются. Элементы этих пар сложны в изготовлении.

Механизмы с низшими кинематическими парами передают большие нагрузки, имеют большие потери на трение, сложнее синтезируются. Имеют простые формы в виде плоскостей, цилиндрических поверхностей, поэтому более технологичны, т. е. просты в изготовлении.

1.2. Расчет подвижности плоского механизма

Подвижностью механизма (или его числом степеней свободы) называется количество обобщённых (независимых) координат, которое должен иметь механизм для того, чтобы все его звенья имели вполне определённые движения.

Представим себе, что нам необходимо спроектировать механизм из k звеньев. Так как каждое звено, будучи свободным в плоскости, обладает тремя степенями свободы, то получим:

$3k$ – общее количество степеней свободы всех k звеньев.

При образовании *кинематической цепи* звенья теряют свои степени свободы.

Кинематическая цепь – это ряд звеньев, соединённых между собой кинематическими парами. Если в кинематической цепи

p_5 – количество кинематических пар 5-го класса, а каждая такая пара накладывает два условия связи на относительное движение звеньев, поэтому

$2p_5$ – общее количество условий связи, наложенных всеми парами 5-го класса.

Пусть также в кинематической цепи

p_4 – количество кинематических пар 4-го класса. Так как каждая пара 4-го класса накладывает одно условие связи, то

$1p_4$ – общее количество условий связи, наложенных на относительное движение звеньев всеми парами 4-го класса.

Если обозначить буквой S общее количество условий связей в кинематической цепи, наложенное парами обоих классов, то

$$S = 2p_5 + p_4.$$

Количество степеней свободы H кинематической цепи определится разностью между числами $3k$ и S :

$$H = 3k - (2p_5 + p_4).$$

Механизм – это кинематическая цепь с одним неподвижным звеном, допускающая целесообразные однозначно определённые движения. Поэтому при образовании механизма одно из его звеньев должно быть сделано неподвижным (*стойкой*), тогда число степеней свободы механизма будет: $W = H - 3$, или

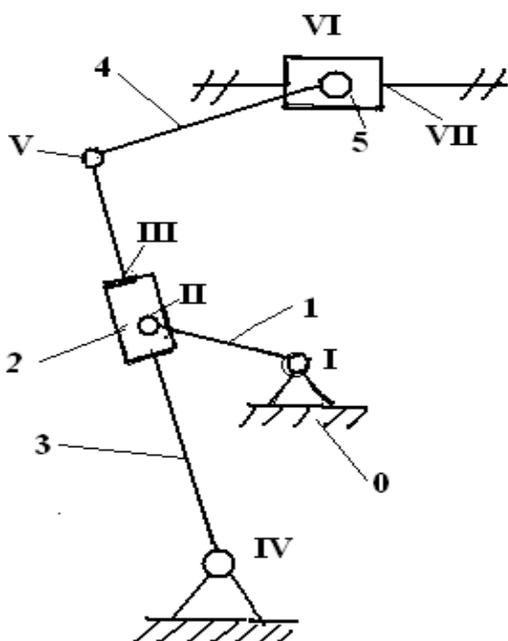
$$W = 3(k - 1) - (2p_5 + p_4).$$

Обозначив $k - 1 = n$ (n – количество подвижных звеньев механизма), имеем

$$W = 3n - (2p_5 + p_4).$$

Эта формула была получена в 1869 году академиком Петербургской Академии наук П.Л.Чебышёвым и носит название *формулы Чебышёва*.

Фактически W означает количество независимых движений, которые должен иметь данный механизм для получения полной определённости в движениях всех его звеньев. По существу W означает чаще



всего количество ведущих звеньев механизма.

Пример. Механизм поперечно - строгального станка.

Обозначим номера подвижных звеньев данной схемы арабскими цифрами, их количество составит $n = 5$, римскими цифрами обозначим номера кинематических пар 5-го класса, получив их количество $p_5 = 7$, пары 4-го класса в этом механизме отсутствуют, т. е. $p_4 = 0$. Расчёт по формуле Чебышёва даёт

$$W = 3 \cdot 5 - (2 \cdot 7 + 1 \cdot 0) = 1$$

Следовательно, в этом механизме одна степень свободы, что означает необходимость выбрать одно ведущее звено для его нормального функционирования.

1.3. Структурная классификация механизмов

Принцип структурного образования механизмов по Л.В. Ассур

Основы теории структуры плоских механизмов были заложены в 1914 г. профессором Л.В. Ассуром. Согласно сформулированному им принципу, любой плоский механизм (рис. 1.6) может быть образован путем присоединения к исходному механизму, включающему стойку и ведущее звено, кинематических цепей, имеющих нулевую подвижность. Тогда подвижность механизма запишется как сумма

$$W_{\text{мех}} = W_{\text{исх. мех}} + 0 + 0 + 0 + \dots$$



Рисунок 1.6

Группы Ассура и их классификация

Кинематическая цепь, которая после присоединения её всеми свободными элементами кинематических пар к стойке получает подвижность, равную нулю, называется группой Ассура. Таким образом,

$$W_{\text{гр.Асс.}} = 0.$$

В состав группы Ассура входят только кинематические пары 5 класса, поэтому, согласно формуле Чебышёва:

$$W_{\text{гр.Асс.}} = 3n - 2p_5 = 0,$$

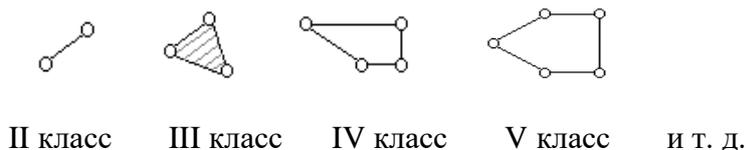
откуда получаем $3n = 2p_5$, или $p_5 = 3/2 \cdot n$, как условие существования группы Ассура. Составим таблицу из нескольких сочетаний количества звеньев и кинематических пар в группах Ассура согласно приведённому выше соотношению

n	2	4	6...
p	3	6	9...
5			

Группы Ассура делятся на классы и порядки. Класс группы определяется классом наиболее слож-

ному выше
лее слож-

ного замкнутого контура в составе группы:



Кинематические пары в контуре III класса, могут быть расположены по одной прямой, не образуя никакой контур, однако считается, что и в этом случае имеется контур III класса. Порядок групп Ассур определяется количеством свободных элементов кинематических пар, которыми группы Ассур присоединяются к другим звеньям.

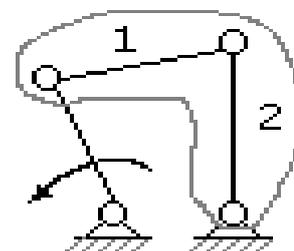
Рассмотрим несколько примеров групп Ассур и механизмов с этими группами.

$$n=2$$

$$p_5=3$$

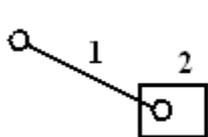


Группа Ассур II класса, 2-го порядка
1-го вида

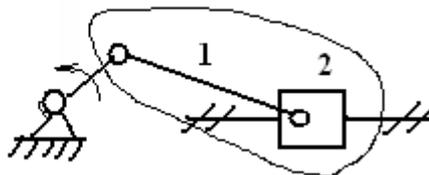


Четырёхшарнирный
механизм

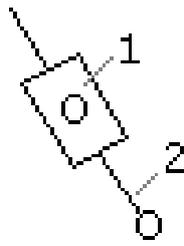
Группы II класса делятся также на виды (модификации) в зависимости от количества и расположения в них поступательных и вращательных кинематических пар. Приведённая выше группа Ассур относится к *первому виду*. Если в этой группе один из крайних элементов вращательной пары заменить поступательным, то получится группа *второго вида*. Если заменить среднюю вращательную пару поступательной, то такая группа Ассур получится группой Ассур *третьего вида*.



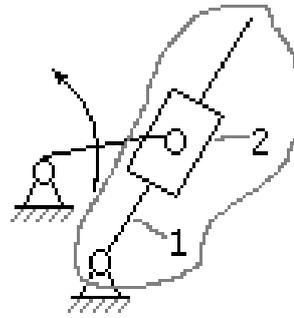
Группа Ассур
II класса, 2-го
порядка, 2-го вида



Кривошипно-ползунный
механизм

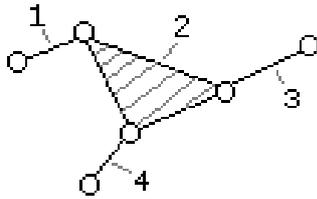


Группа Ассура II класса,
2-го порядка, 3-го вида

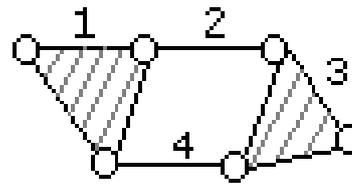


Кривошипно-кулисный
механизм

$n = 4$
 $p_5 = 6$



Группа Ассура III класса,
3-го порядка



Группа Ассура IV класса
4-го порядка

Классификация механизмов. Формула строения

В связи с группами Ассура, механизмы также делятся на классы. В составе механизма могут быть несколько групп Ассура разных классов, но механизму присваивается тот класс, который имеет группа Ассура наиболее высокого класса. Формула строения отражает порядок присоединения групп Ассура друг к другу и к исходному механизму. Приведём здесь для примера вид формулы строения двух механизмов безотносительно к их кинематическим схемам:

При одном ведущем звене



При двух ведущих звеньях



В числителе этих формул проставлены номера звеньев, в знаменателе – класс и порядок групп Ассура. Исходный механизм считается механизмом первого класса. Стрелки указывают направление передачи движения от исходного механизма. Согласно принятой классификации механизмов первая из приведённых формул относится к механизму третьего класса, вторая – к механизму четвёртого класса.

1.4. Замена высших пар в плоских механизмах

При выполнении структурного анализа механизма, если в нём присутствуют высшие пары, требуется их заменить парами низшими. При этом необходимо выполнить следующие условия:

- 1) Количество связей, наложенных на относительное движение звеньев высшей пары заменяющей кинематической цепью должно остаться неизменным.
- 2) Мгновенное относительное движение звеньев высшей пары должно сохраниться.

Для выполнения первого условия следует иметь в виду, что одна высшая пара накладывает одно условие связи, поэтому заменяющая кинематическая цепь должна также наложить одно условие связи. Отсюда вытекает равенство:

$$l = 2 p_5 - 3n,$$

из которого следует

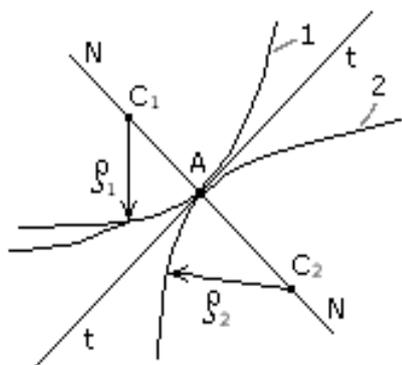
$$p_5 = (3n + l)/2,$$

что позволяет составить следующую табличку возможных сочетаний количества звеньев и пар заменяющей кинематической цепи

n	1	3	...
p_5	2	5	...

Таким образом, в простейшем случае для замены высшей пары требуется одно дополнительное звено и две пары 5-го класса.

Для выполнения второго условия необходимо использовать следующую методику:



- 1) В точке контакта элементов высшей пары провести нормаль N–N (Рис. 1.7).
- 2) На нормали N–N определить положения центров кривизны C_1 элемента 1 и C_2 элемента 2.
- 3) В этих центрах поместить низшие пары (5-го класса), а между ними условное заменяющее звено.

Замечания. Если один из элементов высшей пары заканчивается острием, то в этом острие (в точке) располагается одна из заменяющих низших пар.

Рисунок 1.7

Если одно из звеньев высшей пары в зоне контакта имеет форму прямой линии, то в этом месте пара 5-го класса должна быть поступательной.

1.5. Избыточные (повторяющиеся) связи и местные подвижности в механизмах

Наряду с движениями и условиями связей, которые в механизме влияют на закон преобразования движения, могут существовать такие связи и движения,

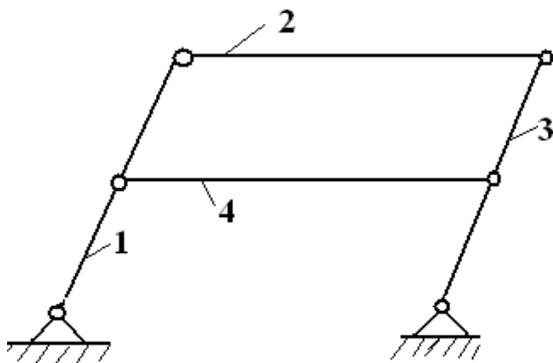


Рисунок 1.8

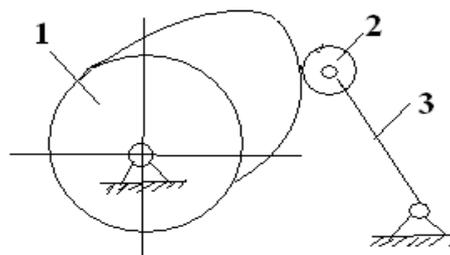


Рисунок 1.9

которые не влияют на этот закон. Такие связи называются *избыточными*, а движения – *местными подвижностями*, или *лишними степенями свободы*. Одна избыточная связь уменьшает расчётную подвижность на единицу, а одна местная подвижность увеличивает её на единицу. На рис. 1.8 показан механизм шарнирного параллелограмма, у которого противоположные стороны попарно равны (отсюда его название). Расчёт подвижности этого механизма даёт

$$W_{расч.} = 3 \cdot n - 2 \cdot p_5 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0,$$

что означает полное отсутствие движения звеньев, т. е. это не механизм, а ферма. Фактически же очевидно, что движение звеньев здесь возможно при ведущем, например звене 1, т. е. фактическая подвижность

$$W_{факт.} = 1.$$

Звенья 2 и 4 выполняют одну и ту же функцию, передавая движение на звено 3, разделяя надвое общий силовой поток, снижая нагрузку, приходящуюся на каждое из них. С точки зрения структуры одно из этих звеньев (например, звено 4) можно считать избыточной связью.

Если подсчитать подвижность кулачкового механизма (рис. 1.9), то окажется, что его $W_{расч.} = 2$, т.е. в этом механизме должно быть два ведущих звена, что невозможно, так как $W_{факт.} = 1$. Местной подвижностью здесь является вращение ролика 2 относительно толкателя 3. Так как это движение не участвует в преобразовании движения в механизме, то оно является лишней степенью свободы. В данном случае это движение необходимо для замены трения скольжения трением качения, что является более выгодным с точки зрения потерь на трение (повышение КПД).

При выполнении структурного анализа механизмов избыточные связи и местные подвижности должны быть исключены.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое машина, механизм, в чём их различие?
2. Что называют звеном механизма?
3. Что называют кинематической парой?
4. Как классифицируются плоские кинематические пары?
5. Что называется кинематической цепью?
6. Как рассчитать подвижность плоского механизма?

7. Какой физический смысл имеет подвижность механизма?
8. Что собой представляет избыточная связь?
9. Что такое местная подвижность (лишняя степень свободы)?
10. В чём состоит принцип структурного образования механизмов по Л.В. Ассуре?
11. Что такое исходный механизм?
12. Что такое группа Ассуре, как классифицируются группы Ассуре?
13. Что называют формулой строения механизма?
14. По каким признакам классифицируют механизмы?
15. Как осуществляется замена высших пар низшими?

2. Кинематика зубчатых механизмов

Зубчатые механизмы служат для преобразования вращательного движения с одновременным преобразованием сил.

2.1. Понятие о передаточном отношении

Основной характеристикой преобразования вращательного движения зубчатых механизмов является *передаточное отношение* – отношение угловой скорости или частоты вращения ведущего звена механизма к угловой скорости или частоте вращения ведомого звена.

Передаточное отношение обозначается латинской буквой « i » с индексами. Индексы указывают на то, от какого колеса (1-й индекс) к какому (2-й индекс) вычисляется передаточное отношение. Например, i_{12} обозначает передаточное отношение от первого колеса ко второму. Согласно определению

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad \text{или} \quad i_{12} = \frac{n_1}{n_2}, \quad \text{так как} \quad \omega = \frac{\pi \cdot n}{30}.$$

Поскольку $i_{21} = \omega_2 / \omega_1$, то $i_{12} \cdot i_{21} = 1$, и $i_{21} = 1 / i_{12}$.

Если в механизме передаточное отношение больше единицы, то угловая скорость ведущего колеса больше, чем ведомого, и такой механизм называется *редуктором*. В противном случае механизм называется *мультипликатором*. Редукторы в машиностроении применяются в большинстве случаев из-за необходимости уменьшения скоростей движения исполнительных органов машин и увеличения на них усилий. Мультипликаторы применяются реже и не являются силовыми устройствами.

При совпадении направлений вращения ведущего и ведомого колёс передаточное отношение имеет положительный знак, т. е. $i_{12} > 0$, если направления вращений не совпадают, то $i_{12} < 0$. Заметим, что знак имеет смысл при параллельных осях колёс.

2.2. Передаточное отношение простой зубчатой передачи

Простая зубчатая передача – трехзвенный зубчатый механизм, состоящий из двух зубчатых колес и стойки. В зубчатых колесах существуют окружности, которые при передаче движения перекатываются друг по другу без скольжения.

Эти окружности называются *центроидными*, т. к. каждая из них является *геометрическим местом центров мгновенного относительного вращения другой окружности*. На рис. 2.1 показана такая передача. В ней колесо 1 вращается вокруг центра O_1 , а колесо 2 – вокруг центра O_2 . Их центроидные окружности касаются друг друга в точке А. Направления вращения колёс указаны стрелками. В точке А окружные скорости колёс одинаковы и определяются произведением угловых скоростей колёс на радиусы центроидных окружностей r_1 и r_2 ,

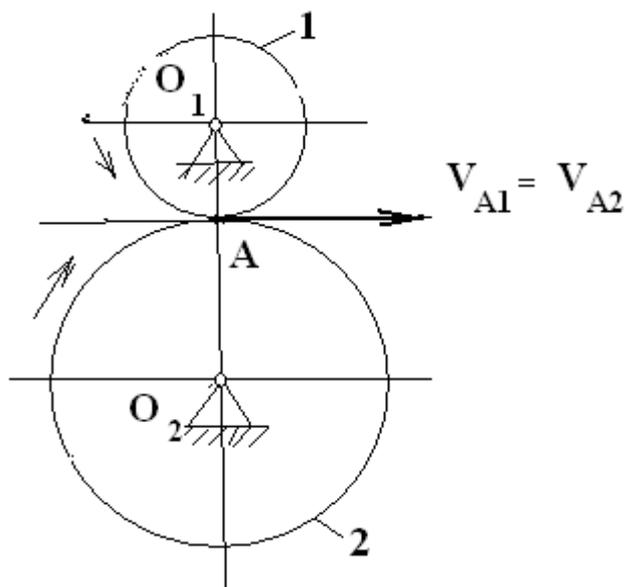


Рисунок 2.1

т. е. соответственно $V_{A1} = \omega_1 \cdot r_1$ и $V_{A2} = \omega_2 \cdot r_2$. А так как эти скорости равны, то имеет место равенство:

$$\omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2,$$

из которого следует, что передаточное отношение может быть выражено через отношение радиусов центроидных окружностей, то есть

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_2}{r_1}.$$

Знаки «+» и «-» перед отношением радиусов появились в связи с тем, что в отличие от угловых скоростей радиусы не могут быть отрицательными, и знак «-» относится к данной схеме, а знак «+» имел бы место при внутреннем зацеплении колёс.

Если центроидными окружностями являются *делительные* окружности, то их радиусы можно выразить следующим образом. Длины центроидных окружностей S_1 первого колеса и S_2 второго колеса определяются выражениями соответственно:

$$S_1 = 2 \cdot \pi \cdot r_1 = p \cdot z_1 \text{ и } S_2 = 2 \cdot \pi \cdot r_2 = p \cdot z_2,$$

где p – шаг колёс по делительной окружности, т. е. *расстояние между одноимёнными точками двух соседних зубьев*, z_1 и z_2 – числа зубьев данных колёс, (то же, что число шагов).

Решим эти выражения относительно радиусов r_1 и r_2 :

$$r_1 = p \cdot z_1 / (2 \cdot \pi), \quad r_2 = p \cdot z_2 / (2 \cdot \pi).$$

Отношение шага по делительной окружности к числу π называется модулем зубчатого колеса, который обозначается латинской буквой m . Модуль, как и шаг, является единым для колёс, находящихся в зацеплении. Он измеряется в миллиметрах, и через него выражаются все размеры зубьев (величины модулей опреде-

ляются стандартом). Подставив теперь вместо радиусов в ранее записанном выражении передаточного отношения их найденные выше значения, после сокращения на 2 и на m , получим окончательно

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{z_2}{z_1}.$$

То есть, передаточное отношение простой зубчатой передачи может быть выражено как обратное отношение чисел зубьев колёс. Это правило справедливо при всех способах расположения осей колёс в пространстве.

2.3. Кинематика зубчатых механизмов с неподвижными осями колёс

Передаточное отношение сложного зубчатого механизма равно произведению передаточных отношений простых зубчатых передач, составляющих сложный механизм. Доказательство этого положения понятно из следующих выкладок:

$$i_{1n} = \omega_1 / \omega_n = \omega_1 / \omega_2 \cdot \omega_2 / \omega_3 \cdot \omega_3 / \omega_4 \cdots \omega_{n-1} / \omega_n.$$

Так как каждый из множителей правой части представляет собой передаточное отношение отдельных последовательно расположенных ступеней простых передач, то можно записать

$$i_{1n} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{34} \cdots i_{n-1,n},$$

что и требовалось доказать.

Механизм с рядовым соединением колёс

В этом механизме все колёса вращаются в одной плоскости, и каждое промежуточное колесо образует зацепление с двумя соседними (рис. 2.2).

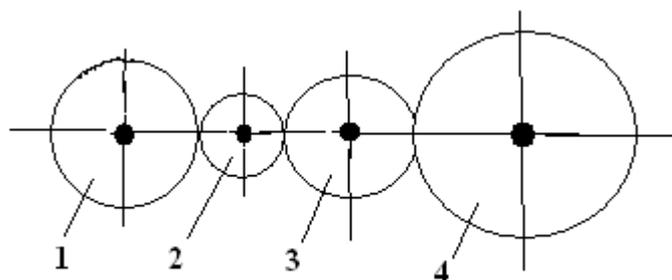


Рисунок 2.2

На схеме механизма цифрами обозначены номера колёс, а неподвижные оси затушёваны.

Согласно доказанному выше положению общее передаточное отношение данного механизма определяется равенством:

$$i_{14} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{34}.$$

Записав передаточные отношения отдельных ступеней

$$i_{12} = -z_2/z_1, \quad i_{23} = -z_3/z_2 \quad \text{и} \quad i_{34} = -z_4/z_3$$

и подставив их в правую часть полученного ранее произведения, имеем

$$i_{14} = (-z_2/z_1) \cdot (-z_3/z_2) \cdot (-z_4/z_3),$$

что после выполнения необходимых действий приводит к следующему результату

$$i_{14} = -z_4/z_1.$$

Этот результат показывает, что в механизмах такого типа передаточное отношение зависит только от чисел зубьев ведущего и ведомого колёс. Промежуточные колёса, числа зубьев которых не влияют на передаточное отношение, называются паразитными. Они позволяют только передать движение на небольшое расстояние

и изменить его знак. Для общего случая механизма с произвольным числом колёс при вычислении передаточного отношения можно руководствоваться следующим

$$i_{1n} = \frac{z_n}{z_1} \cdot (-1)^k,$$

где k – число внешних зацеплений, т. к. только они влияют на знак результата.

Механизм со ступенчатым соединением колёс

В этом механизме колеса вращаются в параллельных плоскостях, и каждое промежуточное колесо вступает в зацепление с одним соседним колесом. На каждом промежуточном валу имеется по два колеса. На рисунке 2.3 показана схема механизма, в котором на промежуточных

валах вращаются колёса 2 и 3, 4 и 5, 6 и 7, на ведущем валу находится одно колесо 1, а на ведомом – также одно колесо 8. Найдём передаточное отношение от первого колеса к восьмому i_{18} . Для этого сначала запишем

$$i_{18} = i_{12} \cdot i_{34} \cdot i_{56} \cdot i_{78}.$$

Так как $i_{12} = -z_2/z_1$, $i_{34} = -z_4/z_3$, $i_{56} = z_6/z_5$ и $i_{78} = -z_8/z_7$, то, подставив в произведение передаточных отношений эти дроби, получим окончательно

$$i_{18} = -\frac{z_2 \cdot z_4 \cdot z_6 \cdot z_8}{z_1 \cdot z_3 \cdot z_5 \cdot z_7}.$$

Никаких сокращений здесь нет кроме возможных общих множителей после подстановки чисел зубьев. Общий знак минус появился из-за того, что в механизме нечётное число пар внешнего зацепления (три пары). По сравнению с предыдущей схемой здесь можно получить практически любое передаточное отношение. Для общего случая механизма запишем формулу передаточного отношения в следующем виде

$$i_{12} = \frac{\prod z_{\text{вм}}}{\prod z_{\text{вц}}} \cdot (-1)^k,$$

где k – число пар колёс внешнего зацепления, а символы в числителе означают произведение чисел зубьев ведомых колёс каждой пары, в знаменателе – произведение чисел зубьев ведущих колёс каждой пары.

Такие механизмы более выгодны с точки зрения преобразования движения, чем механизмы с рядовым соединением колес, т.к. они позволяют получить любое передаточное отношение.

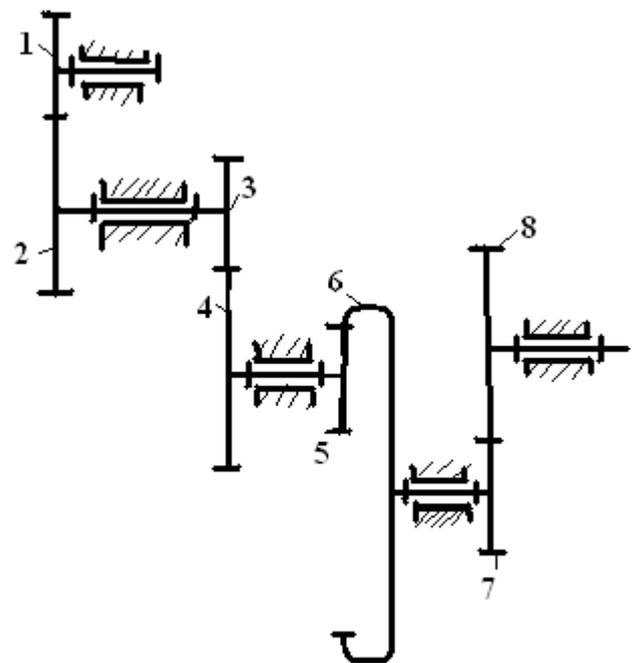


Рисунок 2.3

2.4. Кинематика механизмов планетарного типа

В отличие от рассмотренных схем существуют механизмы, у которых оси отдельных колес подвижны. Такие механизмы относятся к механизмам *планетарного типа* или *эпициклическим*. Эти механизмы по передаточному отношению выгодно отличаются от предыдущих, т. к. они могут обеспечить большое передаточное отношение при малом количестве колес (до 10 тысяч и более при четырех колесах).

Типовая схема эпициклического механизма

На рис. 2.4 представлена одна из простейших типовых схем. Она включает центральное колесо 1 с внешними зубьями, называемое также *солнечным колесом*, центральное колесо 3 с внутренними зубьями и колесо 2, называемое *сателлитом*. Сателлит получил своё название из-за двух вращательных движений, в которых он участвует: вращения вокруг собственной оси и вращения вокруг общей оси механизма. Такую возможность ему предоставляет звено Н стержневого типа, называемое *водилом*.

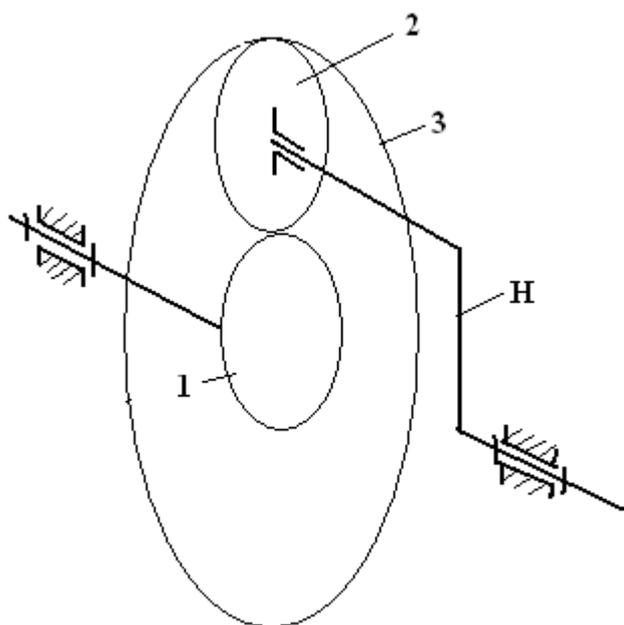


Рисунок 2.4

Если оба центральных колеса вращаются, то механизм имеет $W = 2$ и называется *дифференциальным*.

Если одно из центральных колёс заторможено, то $W = 1$, и механизм называется *планетарным*. Наиболее часто встречающиеся схемы механизмов планетарного типа в блочном представлении

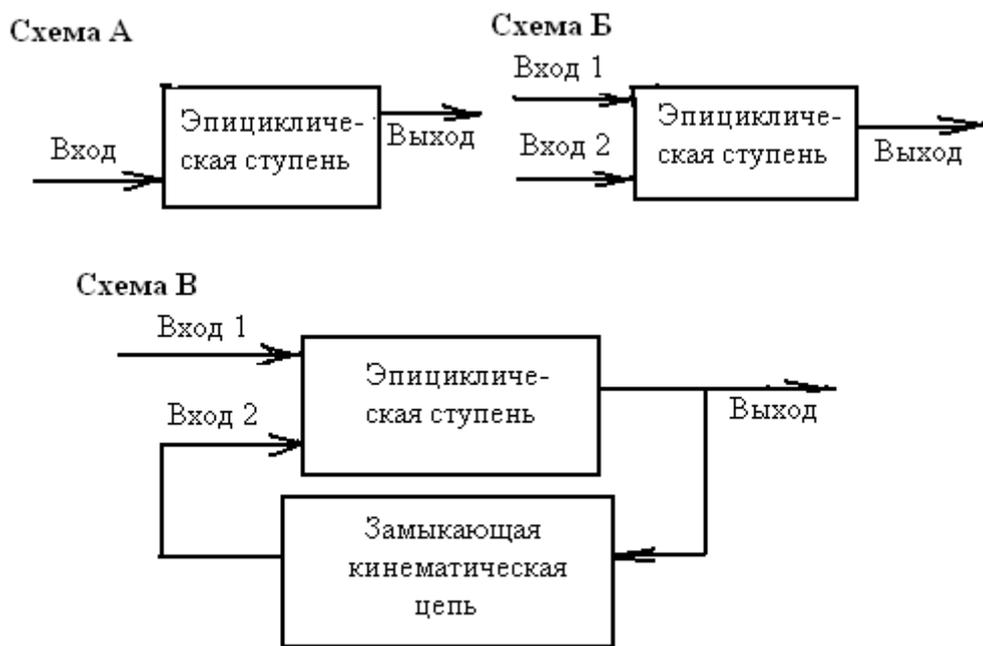


Рисунок 2.5

изображены на рисунке 2.5.

Схема А соответствует обыкновенному планетарному механизму, имеющему одно ведущее звено и одно ведомое при любом числе эпициклических ступеней. На схеме Б показана блок-схема дифференциального механизма с двумя ве-

дущими и одним ведомым звеньями. На схеме В представлен так называемый механизм с замкнутым контуром, который составлен из одной или нескольких эпиклических ступеней, представляющих дифференциальную часть, и дополнительной кинематической цепи, соединяющей выходной вал механизма с одним из его входных валов. В результате такой связи в механизме остаётся одно ведущее и одно ведомое звенья.

Аналитический расчет кинематики

Для аналитического решения задач кинематики, при котором в дифференциальном механизме по заданным угловым скоростям ведущих звеньев определяется угловая скорость ведомого звена, а в планетарном механизме определяется передаточное отношение от ведущего звена к ведомому, применяют *метод обращения движения*. Он заключается в том, что всему механизму вместе со стойкой сообщается движение с угловой скоростью, равной и противоположно направленной угловой скорости водила. Тогда при сохранении характера относительного движения звеньев водило останавливается, а все звенья получают угловые скорости, уменьшенные на угловую скорость водила. Механизм в таком случае превращается в условный механизм с неподвижными осями колес. Это позволяет составить следующую таблицу скоростей:

№ звена	Угловые скорости звеньев в реальном механизме	Угловые скорости звеньев в механизме с условно неподвижным водилом
1	ω_1	$\omega_1^{(H)} = \omega_1 - \omega_H$
2	ω_2	$\omega_2^{(H)} = \omega_2 - \omega_H$
3	ω_3	$\omega_3^{(H)} = \omega_3 - \omega_H$
H	ω_H	$\omega_H^{(H)} = \omega_H - \omega_H = 0$

Записываем передаточное отношение от первого центрального колеса к третьему $i_{13}^{(H)}$ при условно неподвижном водиле. Для схемы, представленной на рисунке 2.4, запишем $i_{13}^{(H)} = \omega_1^{(H)} / \omega_3^{(H)}$, или после подстановки соответствующих разностей из таблицы получаем

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = i_{13}^{(H)}. \quad (a)$$

Из трех величин левой части две должны быть заданы, третья определяется решением данного уравнения.

В планетарном механизме, как сказано выше, одно из центральных колес неподвижно. Если принять колесо 3 с внутренними зубьями за неподвижное, т.е. принять $\omega_3 = 0$, то уравнение (a) запишется в виде $i_{13}^{(H)} = (\omega_1 / \omega_H) / -\omega_H$. Разделив почленно числитель на знаменатель и заменив отношения угловых скоростей обозначениями передаточных отношений, получим окончательно:

$$i_{1H} = 1 - i_{13}^{(H)}, \quad (б)$$

т. е. передаточное отношение в планетарном механизме от любого центрального колеса к водилу равно единице минус передаточное отношение от этого центрального колеса к другому центральному колесу в механизме с условно неподвижным водилом.

З а м е ч а н и е . При решении задачи кинематики одноступенчатого планетарного механизма (схема А по рис. 2.5) и одноступенчатого дифференциального механизма (схема Б по рис. 2.5) составляется и решается одно уравнение типа (б) или типа (а) соответственно. Если решается задача кинематики дифференциального механизма с замкнутым контуром (схема В по рис. 2.5), то необходимо составить два уравнения, одно из которых относится к дифференциальной ступени, другое – к замыкающей кинематической цепи, и решать эти уравнения как систему двух уравнений с двумя неизвестными.

Графический расчет кинематики

Методика графического расчёта основана на том, что окружные скорости центроидных окружностей колес одинаковы, а в точке касания этих окружностей их направления совпадают. Зубчатые колёса, показанные на рисунке 2.6, вращаются навстречу друг другу так, что в точке А касания их центроидных окружностей окружные скорости совпадающих точек A_1 и A_2 также совпадают. Имея в виду, что скорость точки, совершающей вращательное движение вокруг неподвижной точки, линейно зависит от её расстояния до последней, то есть

$$V = \omega \cdot r,$$

закключаем, что концы векторов скоростей точек, лежащих на прямой O_1O_2 , принадлежащих колесу 1, лежат на одной прямой, называемой *линией распределения скоростей* этого колеса. То же самое имеет место и с точками колеса 2, лежащими на линии центров колёс.

Проведём горизонтальную прямую ниже изображения колёс и на некотором расстоянии от этой прямой возьмём произвольную точку Р. Из неё проведём прямые параллельно линиям распределения скоростей до пересечения с горизонталью в точках 1 и 2. Запишем цепочку равенств, имея в виду предыдущие рассужде-

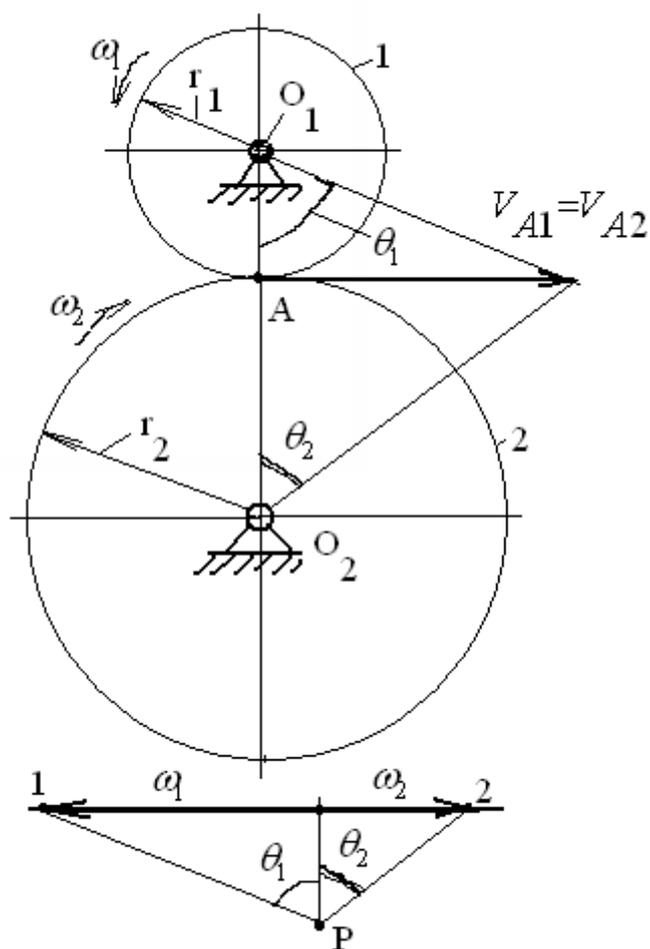


Рисунок 2.6

ния и подобие треугольников на картине зацепления и на нижнем построении:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{V_{A1}}{r_1} \cdot \frac{r_2}{V_{A2}} = \frac{tg \theta_1}{tg \theta_2} = \frac{\overline{O1}}{\overline{OP}} \cdot \frac{\overline{OP}}{\overline{O2}} = \frac{\overline{O1}}{\overline{O2}}.$$

Учитывая начало этого равенства и его конец, можно сделать вывод, что отрезки, полученные на горизонтали, в некотором масштабе изображают угловые скорости колёс. Для определения масштаба угловых скоростей необходимо угловую скорость ω_1 (если, конечно, она задана) поделить на отрезок $\overline{O1}$, измеренный в миллиметрах. Угловая скорость ω_2 определится умножением этого масштаба на отрезок $\overline{O2}$, взятый также в миллиметрах. На основе изложенной методики можно достаточно просто решить задачу кинематики любого зубчатого механизма. Если требуется определить передаточное отношение механизма, то достаточно взять отношение отрезков, выражающих соответствующие угловые скорости.

З а м е ч а н и е . В дифференциальных механизмах с замкнутым контуром (схема В рис. 2.5), как правило, ведущим звеном является центральное колесо дифференциальной ступени, и построение картины линейных скоростей от этого колеса невозможно. Для решения задачи необходимо выбрать в качестве ведущего любое другое звено и задаться произвольно его окружной скоростью. После этого задача решается без затруднений.

Вопросы для самопроверки

1. Для чего применяются зубчатые механизмы?
2. Что такое передаточное отношение?
3. Какие зубчатые механизмы называют редукторами, мультипликаторами?
4. Как можно выразить передаточное отношение в паре зубчатых колёс?
5. Изобразите схему рядового, ступенчатого соединений зубчатых колёс.
5. Какая связь между передаточным отношением сложного зубчатого механизма и передаточными отношениями отдельных его ступеней?
6. Как определяется передаточное отношение в механизмах с рядовым и ступенчатым соединениями колёс?
7. Какие зубчатые механизмы являются механизмами планетарного типа (эпициклическими)?
8. В чём состоит основное достоинство механизмов планетарного типа?
9. Назовите элементы типовой схемы механизма планетарного типа.
10. Для чего и как применяется метод обращения движения?
11. Каковы особенности аналитического расчёта механизмов планетарного типа различных схем?
12. На чём основан графический метод исследования кинематики зубчатых механизмов?
13. Какова особенность графического расчёта кинематики дифференциального механизма с замкнутым контуром?

3. Эвольвентное зубчатое зацепление

3.1. Основной закон зацепления

Этот закон устанавливает связь между геометрией профилей зубьев и условиями передачи движения в зубчатом зацеплении (в более широком смысле – между геометрией элементов высшей пары и условиями передачи движения в механизме с высшей парой).

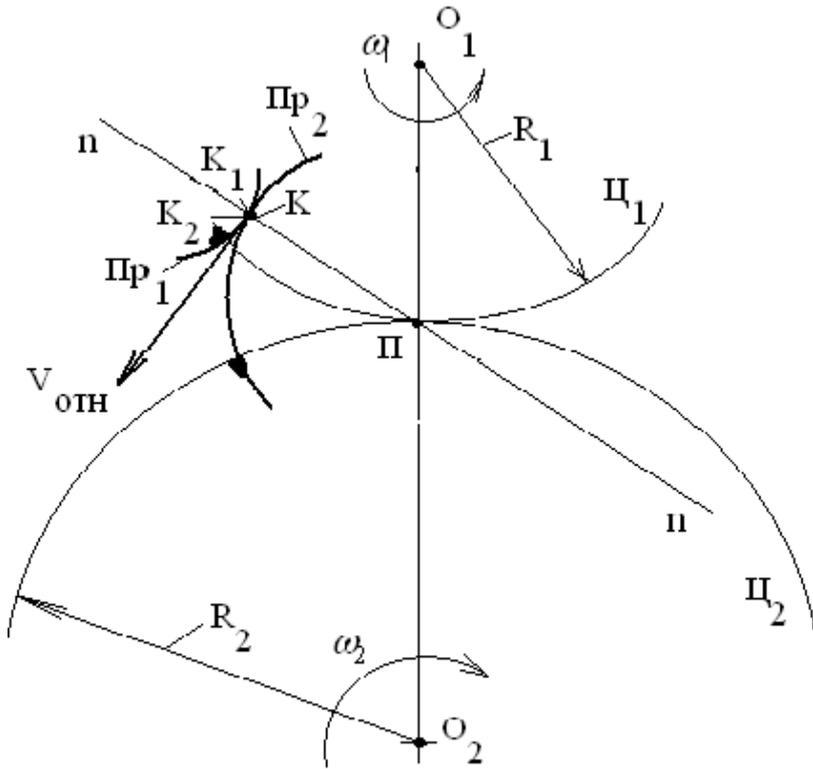


Рисунок 3.1

Возьмём две центроиды Π_1 и Π_2 , принадлежащие колёсам 1 и 2 (рис. 3.1). Эти центроиды касаются друг друга в точке Π (прописная греческая буква «пи»), называемой *полюсом зацепления*.

Свяжем с центроидами профили Пр_1 и Пр_2 так, чтобы они касались друг друга в точке K . Относительная скорость точки K_1 профиля Пр_1 по отношению к совпадающей с ней точке K_2 профиля Пр_2 , (в данный момент обе точки находятся на нормали $n-n$ в точке K) обозначена на рис.3.1 как $V_{\text{отн}}$. Докажем следующие два положения: 1). Вектор $\vec{V}_{\text{отн}} = \vec{V}_{K_1 K_2}$ перпендикулярен нормали, в противном случае

появится составляющая относительной скорости, направленная вдоль неё. Если эта составляющая будет направлена в сторону Пр_2 , то произойдёт внедрение профиля Пр_1 в профиль Пр_2 , если она будет направлена в обратную сторону, то произойдёт отрыв профилей друг от друга. В обоих случаях высшая пара будет разрушена. Так что данное положение доказано.

2) Вектор $\vec{V}_{\text{отн}} = \vec{V}_{K_1 K_2}$ перпендикулярен отрезку $K\Pi$. Так как полюс Π является мгновенным центром поворота центроиды Π_1 относительно центроиды Π_2 , то, согласно положению теоретической механики, все точки, связанные с центроидой Π_1 , имеют скорости, направленные перпендикулярно отрезку, соединяющему данную точку с центром (полюсом) поворота. Это и служит доказательством перпендикулярности вектора скорости и отрезка $K\Pi$. Следует также отметить, что *полюс зацепления* – это не только точка касания центроид, но и *точка пересечения контактной нормали профилей с линией центров колёс*.

Доказанные положения позволяют сделать следующий вывод. *Нормаль к профилям, проведённая в точке их касания, пересекает линию центров колёс в точке, совпадающей с полюсом зацепления, и таким образом делит межосевое расстояние центроид колёс на отрезки, обратно пропорциональные их угловым скоростям,*

$$i_{12} = \pm \frac{O_2\Pi}{O_1\Pi}.$$

Другими словами, для правильной передачи движения с помощью высшей кинематической пары необходимо обеспечивать такую форму профилей зубьев, при которой нормаль к ним в точке контакта (контактная нормаль) проходила бы через полюс зацепления.

Из этих рассуждений следует также, что полюс зацепления – это не только точка касания центроид, но и точка пересечения контактной нормали с межосевой линией.

Профили, подчиняющиеся основному закону зацепления, называются *сопряжёнными*.

Следствие 1. Если полюс Π занимает неизменное положение на линии центров колёс, то передаточное отношение постоянно, и радиусы центроид также постоянны. Это соответствует круглым зубчатым колёсам. В противном случае колёса некруглые.

Следствие 2. Если полюс Π находится между центрами колёс, то они вращаются в противоположные стороны (внешнее зацепление колёс), и передаточное отношение имеет отрицательный знак.

Следствие 3. Если полюс Π находится вне отрезка O_1O_2 , (выше или ниже этих центров), то колёса вращаются в одну сторону (внутреннее зацепление колёс).

Следствие 4. Относительная скорость в точке касания профилей по существу является скоростью скольжения профилей зубьев. Чем дальше от полюса находится точка касания профилей, тем больше в ней скорость скольжения. Если в процессе передачи движения точка контакта профилей совпадёт с полюсом, то в этот момент скорость скольжения будет равна нулю.

Существует большое количество профилей зубьев, удовлетворяющих этому закону. При выборе формы профилей руководствуются их технологичностью (простотой изготовления), простотой инструмента и расчетов. Этим требованиям в полной мере отвечает эвольвентное зацепление.

3.2. Эвольвента окружности, её свойства и уравнение

Эвольвента – это траектория точки прямой линии (производящей прямой), перекатывающейся без скольжения по окружности.

Образование эвольвенты можно представить как траекторию, описываемую остриём карандаша, привязанного к концу нити, сматываемой с катушки, установленной своей осью перпендикулярно плоскости листа бумаги.

Свойства эвольвенты

- 1) Нормаль к эвольвенте является касательной к основной окружности.

2) Центры кривизны эвольвенты лежат на основной окружности, так что основная окружность представляет собой *эволюту*, т. е. геометрическое место центров кривизны эвольвенты.

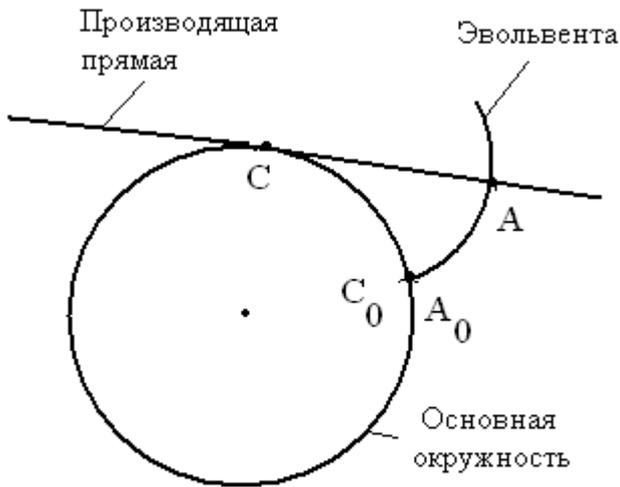


Рисунок 3.2

3) Радиус кривизны эвольвенты в данной точке равен отрезку производящей прямой, заключённому между данной точкой эвольвенты и точкой касания производящей прямой с основной окружностью, $\rho_A = AC$. В точке начала эвольвенты её радиус кривизны равен нулю, $\rho_{A0} = 0$.

4) Радиус кривизны эвольвенты в данной точке равен дуге основной окружности, заключённой между точкой начала эвольвенты и точкой касания этой прямой с основной окружностью, $\rho_A = \overset{\frown}{C_0C}$.

5) Правая и левая ветви эвольвенты симметричны.

6) Все точки эвольвенты лежат снаружи от основной окружности.

Уравнение эвольвенты

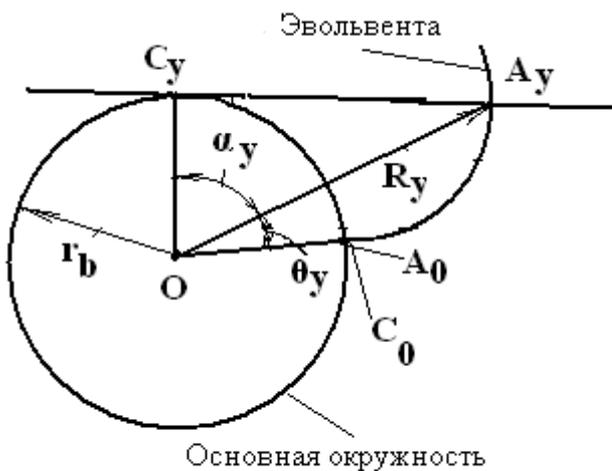


Рисунок 3.3

Для получения уравнения эвольвенты обратимся к рис. 3.3. Положение произвольной точки A_y эвольвенты в полярной системе координат определяется двумя координатами относительно её начального радиус-вектора OA_0 (или OC_0): длиной радиус-вектора R_y и углом θ_y . Радиус-вектор R_y определим из прямоугольного треугольника OA_yC_y :

$$R_y = \frac{r_b}{\cos \alpha_y}.$$

Для определения полярного угла θ_y сначала выразим длину дуги основной окружности через её радиус и центральный угол:

$$\cup \tilde{N}_0 \tilde{N}_y = r_b (\alpha_y + \theta_y).$$

Выразим теперь противолежащий углу α_y катет A_yC_y в $\triangle OA_yC_y$:

$$A_yC_y = r_b \cdot \operatorname{tg} \alpha_y.$$

На основании четвёртого свойства эвольвенты имеем

$$A_yC_y = \cup \tilde{N}_0 \tilde{N}_y.$$

Подставляя в это равенство соответствующие выражения и решая его относительно θ_y , получаем

$$\theta_y = \operatorname{tg} \alpha_y - \alpha_y.$$

В этих математических выражениях и на рис. 3.3 угол α_y называется *профильным углом эвольвенты*. Разность между тангенсом какого-либо угла и самим углом называется *эвольвентной функцией* и обозначается тремя первыми буквами латинского названия эвольвенты *involute*, т. е. *inv*, так что окончательно уравнение имеет вид:

$$\theta_y = \operatorname{inv} \alpha_y.$$

В математических справочниках приводятся таблицы эвольвентной функции, в которых аргумент α_y изменяется от нуля до нескольких десятков градусов.

3.3. Элементы зубчатого колеса

Здесь рассматриваются те элементы колеса, которые относятся к его ободу, где располагаются зубья (рис. 3.4).

Шаг колеса p – это расстояние по делительной окружности между одноимёнными профилями двух соседних зубьев, $p = \pi \cdot m$. Шаг включает два параметра – толщину зуба s и ширину впадины e . Если $s = e$, то имеем колесо с равноделённым шагом, в противном случае имеем колесо с неравноделённым шагом.

Делительная окружность (её радиус r , в зацеплении двух колёс имеет индекс номера колеса):

- делит зуб на головку и ножку;
- модуль m на этой окружности имеет стандартное значение;
- радиус окружности имеет величину $r = 0,5m z$;
- в точке на делительной окружности профильный угол эвольвенты $\alpha_y = 20^\circ$ и обозначается буквой α без индекса.

Основная окружность является базовой для образования эвольвенты (от неё начинается эвольвентная часть зуба). Радиус этой окружности получается из рассмотрения прямоугольного треугольника с углом при вершине O , равным α , и одним из катетов, равным r_b , и гипотенузой, равной r : $r_b = r \cdot \cos \alpha$.

Окружность вершин является габаритной окружностью колеса, её радиус определяется формулой

$$r_a = r + h_a,$$

где h_a – высота головки зуба, причём $h_a = h_a^* \cdot m$. Множитель перед модулем называется *коэффициентом высоты головки зуба* и равен по величине 1, т. е. $h_a^* = 1$.

Диаметр окружности вершин является диаметром заготовки для изготовления зубчатого колеса.

Окружность впадин ограничивает зуб у основания, её радиус равен

$$r_f = r - h_f,$$

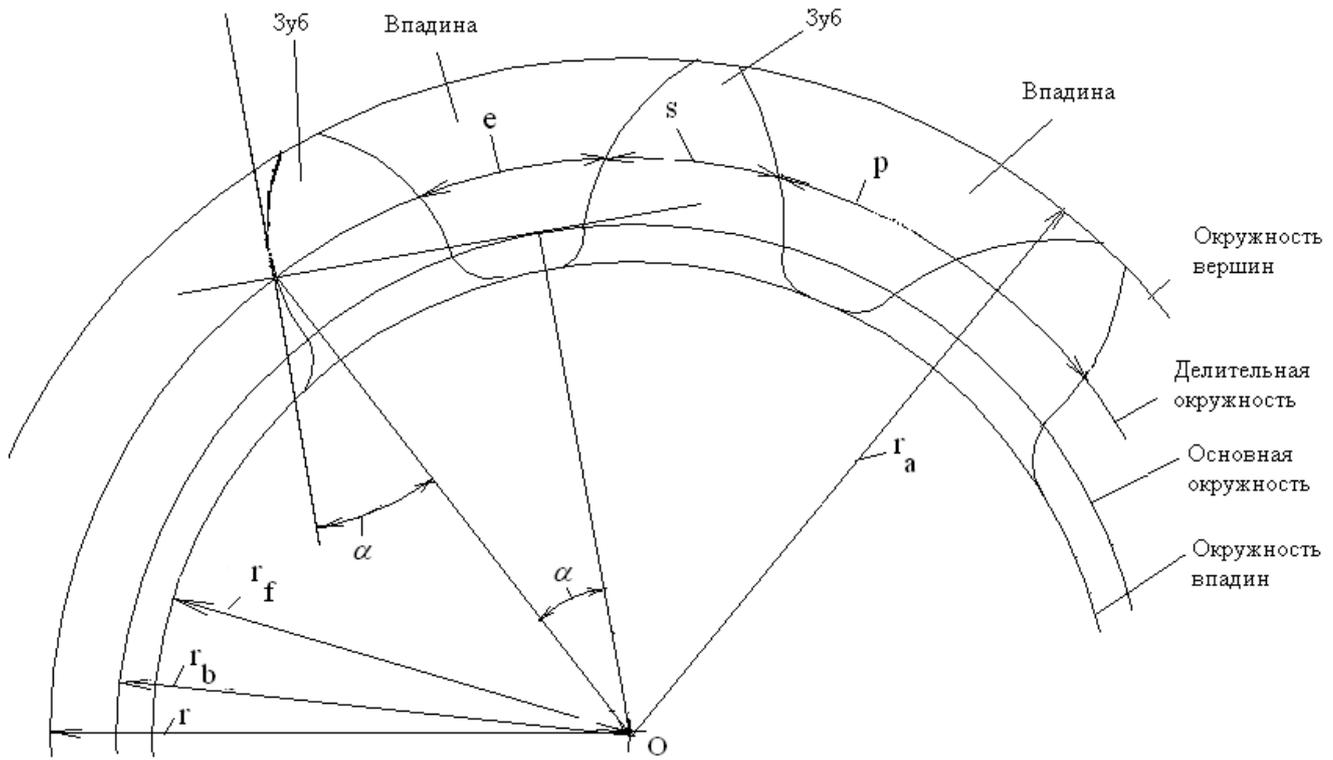


Рисунок 3.4

где h_f – высота ножки зуба, определяемая равенством $h_f = (h_a^* + c^*) \cdot m$, второе слагаемое в скобках называется *коэффициентом радиального зазора* и имеет величину $c^* = 0,25$.

Контур зуба от основной окружности до окружности вершин очерчен эвольвентой, которая сопрягается с окружностью впадин *переходной кривой* (эквидистантой удлинённой эвольвенты).

3.4. Элементы и свойства эвольвентного зацепления

Отметим прежде всего, что здесь рассматриваются те элементы зацепления, которые имеются именно в зацеплении колёс и исчезают, если колёса вывести из зацепления (рис. 3.5). К этим элементам относятся следующие.

Межосевое расстояние a_w – это расстояние между центрами колёс O_1 и O_2 .

Полюс зацепления Π (пи) – это точка касания центроидных окружностей колёс с радиусами r_{w1} и r_{w2} , которые в эвольвентном зацеплении называются *начальными окружностями*.

Теоретическая линия зацепления N_1N_2 – это геометрическое место точек мгновенного касания профилей зубьев, отмеченное на неподвижной плоскости. Процесс передачи движения происходит таким образом, что профили одной пары зубьев на протяжении некоторого времени касаются друг друга, т. е. имеют *общую нормаль*. На основании первого свойства эвольвенты нормаль к ней является касательной к основной окружности, а для двух касающихся друг друга профилей является касательной к обеим основным окружностям. Поэтому для данных профилей контактная нормаль является единственной и лежит на общей

касательной к основным окружностям, образуя таким образом прямолинейную линию зацепления. С учётом геометрических размеров конкретных колёс линия зацепления используется для передачи движения только в пределах зоны, заключённой между точками её пересечения с окружностями вершин (рис.3.5). Эта зона называется *активной линией зацепления*. Её границы на рис. 3.5 отмечены точками H_1 и H_2 .

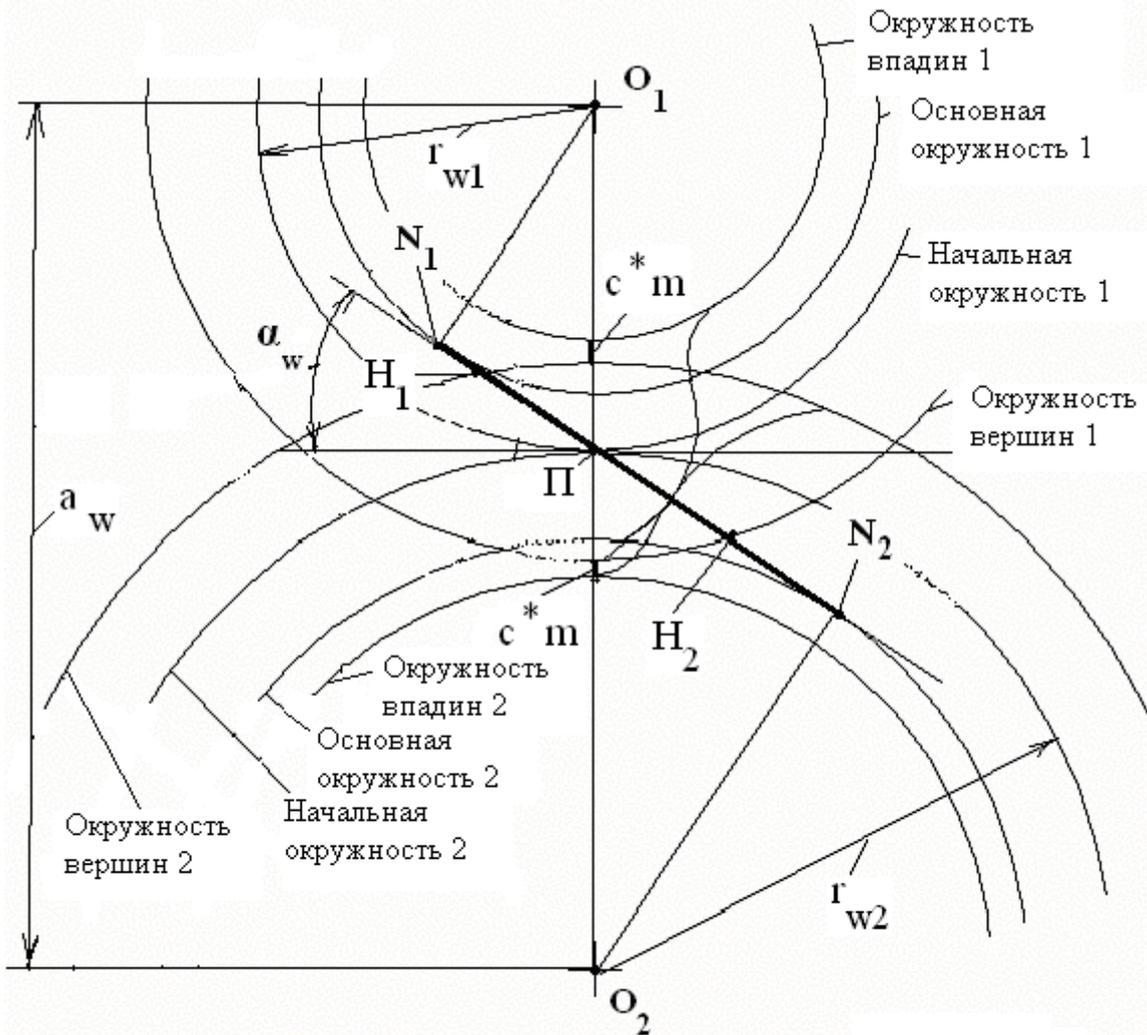


Рисунок 3.5

Угол зацепления α_w – это угол между линией зацепления и общей касательной к начальным окружностям, проведённой через полюс зацепления.

Сопряжённые (или парные) точки – это точки профилей зубьев, которыми они касаются друг друга на линии зацепления.

Радиальный зазор – это расстояние на межосевой линии между точками пересечения её с окружностью вершин одного колеса и впадин другого колеса.

Свойства зацепления

1) Передаточное отношение постоянно в любой фазе зацепления, так как оно может быть выражено через радиусы основных окружностей. Для доказательства

используем подобные прямоугольные треугольники (рис. 3.5) $\Delta O_1 N_1 \Pi$ и $\Delta O_2 N_2 \Pi$ и запишем цепочку равенств:

$$|i_{12}| = \left| \frac{\omega_1}{\omega_2} \right| = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = \frac{O_2 N_2}{O_1 N_1} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}}.$$

2) Передаточное отношение не зависит от изменения межосевого расстояния a_w по той же причине, что и в предыдущем случае.

3) Правильное зацепление эвольвентных профилей происходит только в пределах линии зацепления $N_1 N_2$, так как только в этих пределах контактирующие эвольвентные профили имеют общую нормаль.

4) Эвольвентные колёса одного модуля имеют полную взаимозаменяемость, т. е. могут составить правильное зацепление.

3.5. Методы изготовления зубчатых колёс

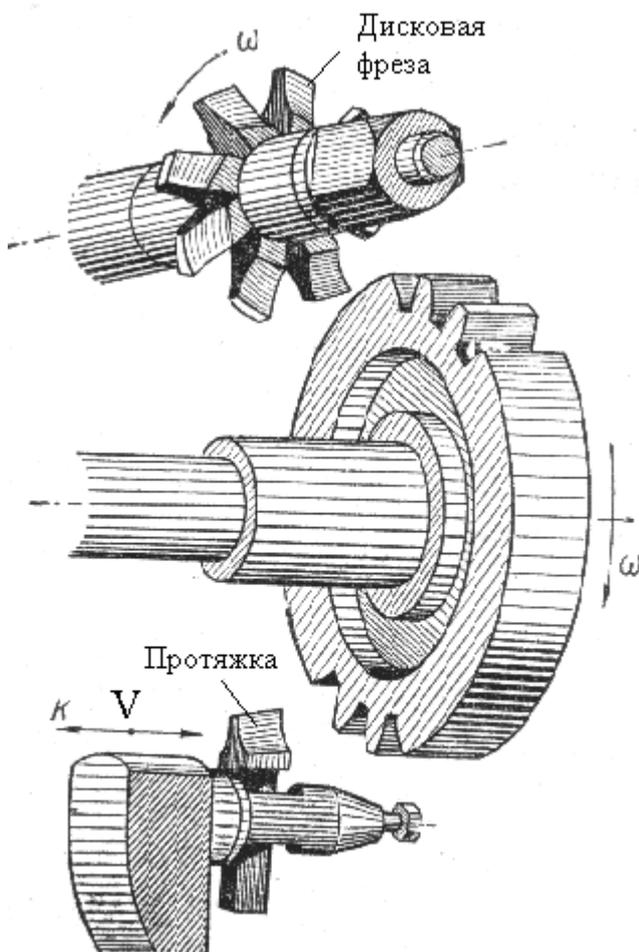


Рисунок 3.6

Метод копирования заключается в том, что профиль зуба колеса повторяет форму профиля инструмента (рис. 3.6), который, в свою очередь, теоретически точно соответствует форме эвольвенты и переходной кривой зуба конкретного колеса. Инструментом могут служить дисковая или пальцевая модульные фрезы, или протяжка. Достоинством метода является возможность применения универсального оборудования (горизонтально- или вертикально-фрезерных станков), оснащенного делительной головкой для точного поворота заготовки на угловой шаг после обработки очередной впадины. Такое оборудование имеется, как правило, в ремонтной службе любого предприятия. К недостаткам следует отнести низкую точность и невысокую производительность. Кроме того, геометрия эвольвенты полностью определяется радиусом основной окружности, зависящей от модуля и числа зубьев, поэтому каждое колесо

по существу должно иметь собственный инструмент для нарезания зубьев. Так как это невозможно, то применяют наборы фрез одного модуля из 8 или 15 штук.

Каждая фреза набора используется для изготовления нескольких колёс с разными числами зубьев, одному из которых она обеспечивает номинально точную эвольвенту, а другие получают ошибку профиля. Ошибка получается тем больше, чем больше отклоняется число зубьев колеса от номинала. *Метод обкатки (огибания)* состоит в том, что профиль зуба колеса получается как огибающая ряда последовательных положений профиля инструмента (рис. 3.7).

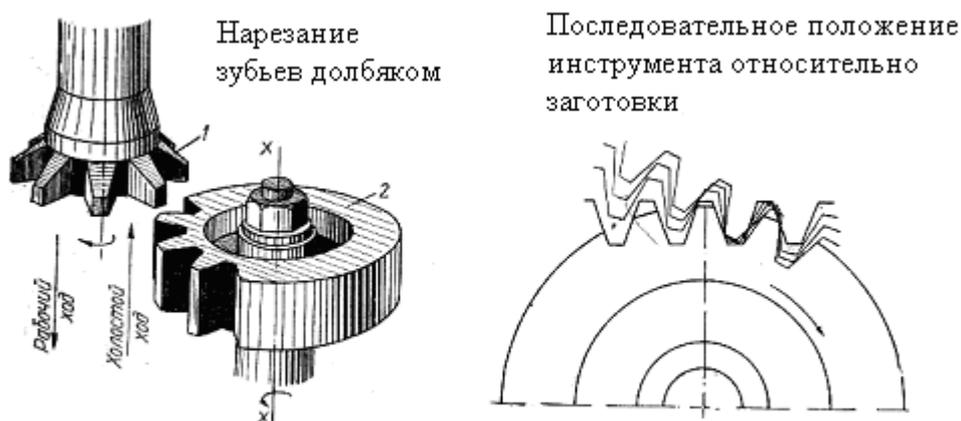


Рисунок 3.7

С точки зрения кинематики движение инструмента относительно ещё ненарезанного колеса с помощью специальной цепи деления станка повторяет то движение, которое осуществляется в зубчатой передаче. Так как инструмент, по существу представляет собой зубчатое колесо с геометрией режущего инструмента, то в процессе нарезания он срезает всё, что попадает в зону движения режущих кромок, а оставшееся и представляет собой зубья колеса. Метод характеризуется высокой точностью, производительностью и, что немаловажно, позволяет инструментом одного модуля изготавливать зубчатые колёса с любым числом зубьев. К недостаткам метода можно отнести необходимость в специальном зубообрабатывающем оборудовании, однако этот недостаток с лихвой компенсируется достоинствами метода.

3.6. Геометрия реечного производящего исходного контура

Реечным производящим исходным контуром (коротко – *исходным контуром* или *инструментальной рейкой*) называется профиль зуборезной гребёнки, применяемой для нарезания зубьев на зубострогальном станке, и профиль нормального сечения червячной фрезы, применяемой для нарезания зубьев на зубофрезерном станке. Форма и размеры исходного контура устанавливаются Государственным стандартом. Элементы и размеры исходного контура можно увидеть на рис. 3.8.

Делительная прямая проходит точно посередине высоты зубьев и делит, таким образом, высоту зуба пополам. По этой прямой *шаг исходного контура*

$p = \pi \cdot m$ делится на две равные части, *толщину зуба s* и *ширину впадины e*, равные половине шага каждая.

Часть контура выше делительной прямой называется *головкой*, ниже – *ножкой исходного контура*. Таким образом, делительная прямая делит зуб исходного контура на головку и ножку. Как видно из рис. 3.8, прямолинейная часть профиля исходного контура заключена между граничными прямыми, параллельными делительной прямой. Эти прямые отстоят от делительной на расстояние $h_a^* m$ вверх и вниз от неё. Сверху зуб ограничен *прямой вершин*, отстоящей от граничной прямой головок на величину $c^* m$, снизу он ограничен *прямой впадин*, отстоящей

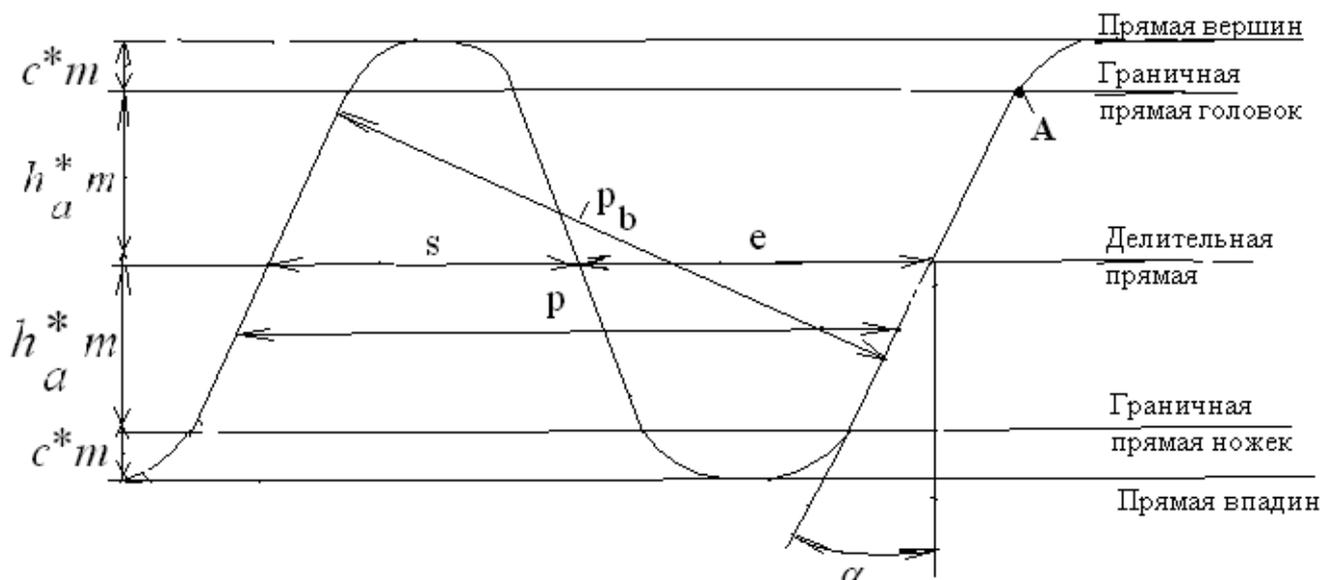


Рисунок 3.8

от граничной прямой ножек на то же расстояние. С учётом отмеченных размеров общая высота зуба исходного контура получается

$$h = 2(h_a^* + c^*)m.$$

Наклон прямолинейных участков профиля относительно вертикали составляет угол $\alpha = 20^\circ$, который называется *углом профиля реечного производящего исходного контура*.

Расстояние по нормали между одноимёнными точками двух соседних зубьев называется *нормальным шагом исходного контура* P_n (он равен основному шагу зубчатого колеса p_b , поэтому на рис. 3.8 он так и обозначен) и определяется формулой

$$P_n = P_b = p \cdot \cos \alpha.$$

При изготовлении зубчатого колеса прямолинейная часть профиля исходного контура формирует эвольвенту зуба колеса, а скруглённая часть головки исходного контура формирует переходную кривую на ножке зуба колеса. Рабочая рейка, используемая в реечной передаче, отличается от инструментальной тем, что в ней срезана скруглённая часть на головках зубьев. Тем самым обеспечивается радиальный зазор в передаче, потому что общая высота зуба рабочей рейки равна высоте зуба зубчатого колеса.

При нарезании зубчатого колеса заготовка и инструмент (исходный контур) принудительно движутся относительно друг друга, как колёса в зубчатой передаче, поэтому в зацеплении инструмента и нарезаемого колеса присутствуют все элементы зацепления двух колёс, в том числе и центры. *Центроидой нарезаемого колеса* всегда служит его *делительная окружность*. Центроидой инструмента называется *станочно-начальная прямая* и может совпадать или не совпадать с делительной прямой. В первом случае получается так называемое *нулевое колесо*. Если станочно-начальная прямая расположена выше делительной, что соответствует смещению инструмента в сторону от центра колеса, то получается *положительное колесо*. Такое название связано с тем, что смещение инструмента определяется величиной $X \cdot m$, где X называется *коэффициентом смещения*, и в данном случае он считается положительным. Если станочно-начальная прямая расположена ниже делительной, то получается *отрицательное колесо*, так как в этом случае коэффициент смещения X считается отрицательным.

3.7. Подрез зуба колеса и его предотвращение

Подрезом зуба называется пересечение траектории точки А, лежащей на граничной прямой головок исходного контура (см. рис. 3.8), с эвольвентой зуба нарезаемого колеса. В результате этого происходит утонение ножки зуба в его опасном сечении при работе на изгиб (рис.3.9) и уменьшение плавности работы передачи из-за сокращения эвольвентной части зуба.

Подрез, как правило, недопустим. Он наступает при количестве зубьев колеса, которое меньше некоторого значения, называемого *минимальным числом зубьев*. Для определения этого числа зубьев обратимся к рис. 3.10.

Если число зубьев нарезаемого колеса достаточно велико, $z' > z_{\min}$, то конец N' теоретической линии зацепления при нарезании располагается выше граничной прямой головок инструмента, и подрез отсутствует.

Если число зубьев нарезаемого колеса мало $z'' < z_{\min}$, то конец N'' теоретической линии зацепления расположен ниже граничной прямой головок, и подрез есть. Наконец, если граничная прямая головок проходит точно через границу теоретической линии зацепления, то подреза ещё нет, т. е. имеет место некое пограничное состояние. Число зубьев колеса, соответствующее этому состоянию, равно минимальному, т. е. z_{\min} .

Выразим отрезок КП на межосевой линии двояким образом. С одной стороны он равен $h_a^* m$, с другой, последовательно рассмат-

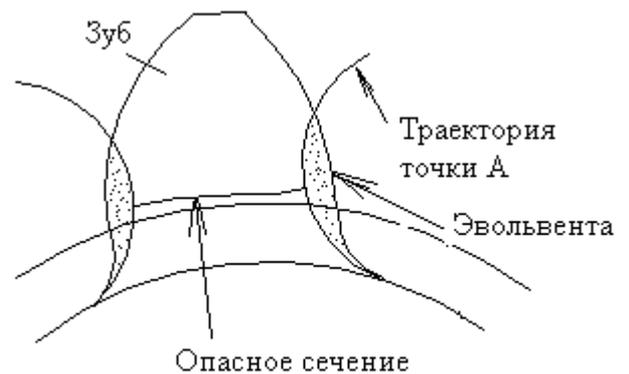


Рисунок 3.9

ривая треугольники ПКН и PON , имеем

$$\hat{E}\ddot{I} = \ddot{I}N \cdot \sin \alpha = \hat{I}\ddot{I} \cdot \sin^2 \alpha = \frac{m \cdot z_{\min}}{2} \cdot \sin^2 \alpha.$$



Рисунок 3.10

величину, при которой её граничная прямая головок пройдёт через точку N линии зацепления (рис. 3.11).

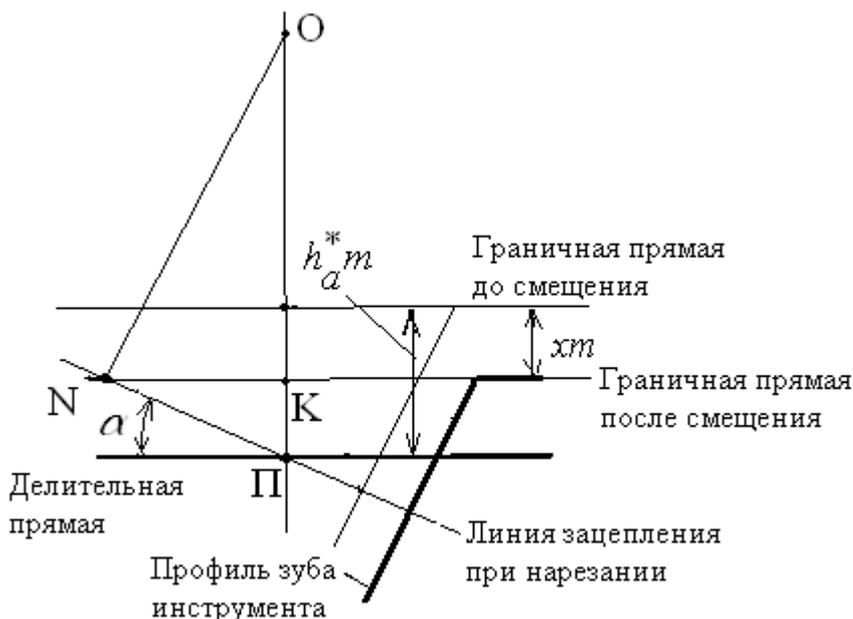


Рисунок 3.11

разований находим искомый коэффициент смещения:

Приравнивая правую часть полученного выражения к $h_a^* m$ и, решая новое равенство относительно z_{\min} , получаем

$$z_{\min} = \frac{2 \cdot h_a^*}{\sin^2 \alpha}.$$

Стандартным параметрам исходного контура соответствует $z_{\min} = 17$.

При необходимости изготовления колеса с числом зубьев, меньшем минимального, и предотвращения подреза следует инструментальную рейку сместить от центра колеса на такую

величину, при которой её граничная прямая головок пройдёт через точку N линии зацепления (рис. 3.11). Определим необходимую величину смещения. Согласно рис. 3.11 имеем с одной стороны

$$\hat{E}\ddot{I} = h_a^* m - xm,$$

и с другой стороны $\hat{E}\ddot{I} = \ddot{I}N \cdot \sin \alpha$, или

$$\hat{E}\ddot{I} = \ddot{I}N \cdot \sin \alpha, \text{ или}$$

$$\hat{E}\ddot{I} = \ddot{I}N \cdot \sin \alpha.$$

Так как $O\ddot{I} = r = \frac{1}{2} m z$,

то, приравнивая правые части этих выражений и

заменив $\sin^2 \alpha$ на $\frac{2h_a^*}{z_{\min}}$,

после несложных преоб-

$$x = h_a^* \left(1 - \frac{z}{z_{\min}} \right).$$

Для стандартных размеров исходного контура $z_{\min} = 17$, поэтому получаем:

$$x = \frac{17-z}{17}.$$

Из этой формулы следует, что если число зубьев колеса меньше мини-

мального, то полученный положительный коэффициент смещения означает, что для предотвращения подреза инструмент должен быть смещён в сторону от центра колеса. Если число зубьев колеса больше минимального, то коэффициент смещения получается отрицательным и указывает на допустимое смещение инструмента к центру колеса, при котором не будет подреза.

3.8. Качественные характеристики эвольвентного зацепления

Коэффициент перекрытия

Коэффициентом перекрытия называется отношение длины активной линии зацепления к основному шагу зубчатого колеса, он обозначается ε_α и определяется отношением

$$\varepsilon_\alpha = \frac{N_1 N_2}{p_b} = \frac{N_1 N_2}{\pi \cdot m \cdot \cos \alpha}.$$

Передача движения в зубчатом зацеплении происходит таким образом, что, прежде чем предыдущая пара зубьев выйдет из зацепления (из контакта), последующая должна войти в зацепление (в контакт). Чем раньше она вступит в за-

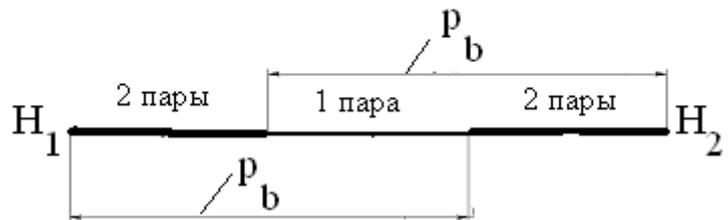


Рисунок 3.12

цепление, тем более плавно работает передача. Количественной характеристикой этого качества и является коэффициент перекрытия, т. е. он, по существу, характеризует плавность работы зубчатой передачи. Обычно величина коэффициента перекрытия заключена между 1 и 2, при этом минимальное значение не должно быть меньше 1,1. Схематически соотношение между длиной активной линии зацепления и основным шагом показано на рис. 3.12. Точка контакта профилей зубьев перемещается вдоль активной линии зацепления от точки N_1 к точке N_2 . Основной шаг короче активной линии зацепления, поэтому в пределах этой линии работают то одна, то две пары зубьев. Если отложить, как показано на рис. 3.12, основной шаг от точек N_1 и N_2 , то отрезок $N_1 N_2$ будет разделён на три части. Две крайние части соответствуют зонам двухпарного зацепления зубьев, а средняя — зоне однопарного зацепления. Чем короче средняя зона, тем плавнее работает зубчатая передача, так как суммарная длина двух крайних участков становится длиннее.

Удельное скольжение

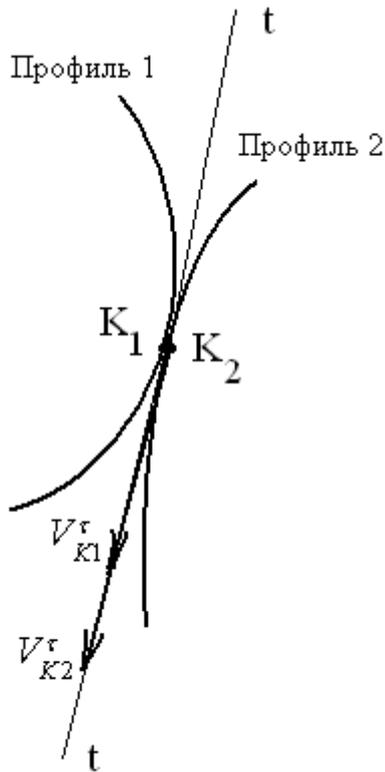


Рисунок 3.13

Удельным скольжением называется отношение скорости скольжения профилей в точке их касания к скорости перемещения точки касания по профилю. Этот показатель характеризует износ зубьев в результате трения скольжения их боковых (рабочих) поверхностей. Возьмём точки K_1 первого профиля и K_2 второго профиля, совпадающие в данный момент друг с другом (рис. 3.13). В этих точках профили имеют общую касательную $t-t$, вдоль которой направлены касательные (тангенциальные) составляющие их абсолютных скоростей. В общем случае эти скорости отличаются друг от друга по величине, могут отличаться и по направлению, оставаясь на общей касательной. Разность величин этих скоростей составляет скорость скольжения в контакте зубьев.

Согласно определению, удельное скольжение выразится двумя математическими выражениями, относящимися к разным колёсам:

$$g_1 = \frac{V_{K_1}^\tau - V_{K_2}^\tau}{V_{K_1}^\tau} \quad \text{и} \quad g_2 = \frac{V_{K_2}^\tau - V_{K_1}^\tau}{V_{K_2}^\tau}.$$

Для определения тангенциальных составляющих скоростей обратимся к рис. 3.14. Соединим точку K_1 с центром O_1 вращения колеса 1 радиусом R_1 , и точку K_2 , совпадающую с точкой K_1 , с центром O_2 радиусом R_2 . Перпендикулярно радиусу R_1 в сторону вращения колеса 1 отложим абсолютную скорость точки K_1 , равную $V_{K_1} = \omega_1 \cdot R_1$, и перпендикулярно радиусу R_2 в сторону вращения колеса 2 отложим абсолютную скорость точки K_2 , равную $V_{K_2} = \omega_2 \cdot R_2$. Отметим угол β_1 между радиусом R_1 и перпендикуляром O_1N_1 к линии зацепления и β_2 между радиусом R_2 и перпендикуляром O_2N_2 также к линии зацепления. Спроецируем скорости V_{K_1} и V_{K_2} на линию зацепления N_1N_2 . Линия зацепления направлена по нормали к профилям зубьев, поэтому проекции скоростей на неё являются нормальными составляющими, равными друг другу. Составляющие, направленные перпендикулярно линии зацепления, действуют по касательной к профилям и являются тангенциальными составляющими. Они определяются следующими цепочками преобразований

$$V_{K_1}^\tau = V_{K_1} \cdot \sin \beta_1 = \omega_1 R_1 \sin \beta_1 = \omega_1 \cdot N_1K$$

$$V_{K_2}^\tau = V_{K_2} \cdot \sin \beta_2 = \omega_2 R_2 \sin \beta_2 = \omega_2 \cdot KN_2$$

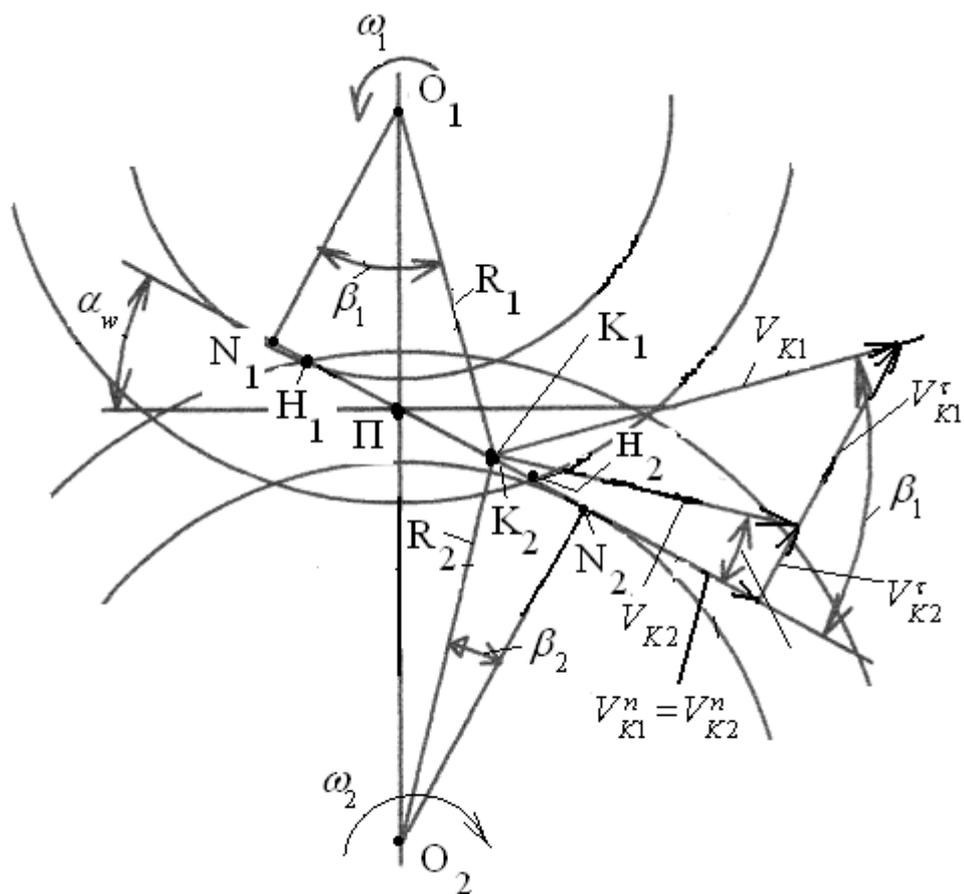


Рисунок 3.14

С учётом этого ранее записанные выражения примут следующий вид:

$$g_1 = 1 - |i_{21}| \cdot \frac{N_1 N_2 - N_1 K}{N_1 K}, \quad g_2 = 1 - |i_{12}| \cdot \frac{N_1 K}{N_1 N_2 - N_1 K}.$$

В этих выражениях буквой К обозначены совпадающие друг с другом точки K_1 и K_2 . Схематический график удельного скольжения показан на рис. 3.15.

График показывает, что удельное скольжение на головках зубьев меньше чем на ножках, следовательно, ножки изнашиваются интенсивнее, чем головки. Характер износа таков, что чем дальше от полюса в радиальном направлении находится зона профиля, тем больше она изнашивается. В полюсе зацепления износ от

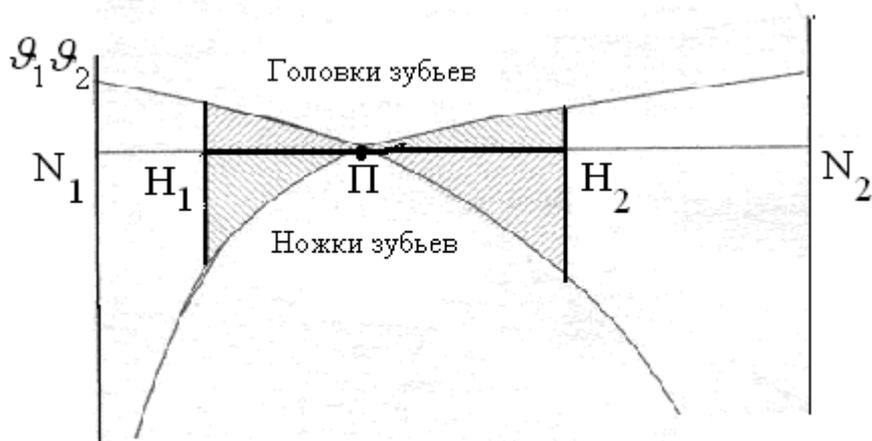


Рисунок 3.15

скольжения равен нулю, так как эта точка является мгновенным центром поворота одного колеса относительно другого, и точки профилей, попадающие в полюс, имеют радиус относительного вращения вокруг полюса, равный нулю.

Коэффициент удельного давления

Коэффициентом удельного давления называется отношение модуля зацепления к приведённому радиусу кривизны профилей зубьев в точке их контакта. Этот коэффициент применяется при расчёте зубьев на контактную прочность. Формула Герца для расчёта контактных напряжений в контакте двух цилиндров имеет вид

$$\sigma_{\hat{\epsilon}} = 0,418 \cdot \sqrt{\frac{P^n \cdot E_{i\delta}}{b \cdot \rho_{i\delta}}},$$

где P^n – нормальное усилие, сжимающее цилиндры, $E_{i\delta}$ – приведённый модуль упругости, b – длина контактной линии цилиндров, $\rho_{i\delta}$ – приведённый радиус кривизны цилиндров.

Умножив числитель и знаменатель формулы на модуль m , не изменим результат, а формула Герца приобретёт следующий вид

$$\sigma_{\hat{\epsilon}} = 0,418 \cdot \sqrt{\frac{P^n \cdot E_{i\delta} \cdot q}{b \cdot m}},$$

где $q = \frac{m}{\rho_{i\delta}}$ и представляет собой коэффициент удельного давления.

Приведённый радиус кривизны определяется как величина, обратная приведённой кривизне, равная сумме кривизн контактирующих профилей, т. е.

$$\frac{1}{\rho_{i\delta}} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \cdot \rho_2}.$$

На основании свойств эвольвенты радиусы кривизны профилей равны: $\rho_1 = N_1 K$ и $\rho_2 = N_1 N_2 - N_1 K$, поэтому окончательно формула получится в виде

$$q = \frac{m \cdot N_1 N_2}{N_1 K \cdot (N_1 N_2 - N_1 K)}.$$

Примерный вид графика

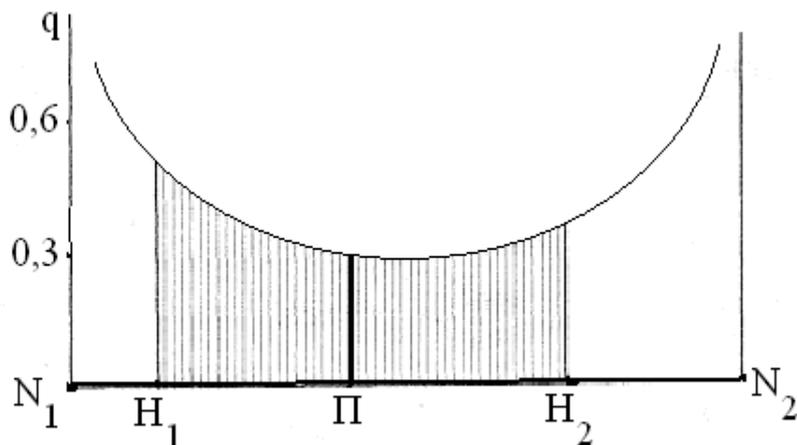


Рисунок 3.16

коэффициента удельного давления в зависимости от положения точки контакта на линии зацепления показан на рис. 3.16.

3.9. Назначение коэффициентов смещения для нарезания зубчатых колёс

Коэффициенты смещения назначаются с целью:

- увеличения изгибной прочности зуба путём увеличения его опасного сечения вблизи основания;
- увеличения контактной прочности зуба путём использования участков эвольвенты, более удалённых от основной окружности;
- выравнивания максимальных удельных скольжений;
- предотвращения подреза малого колеса в передаче;
- увеличения плавности работы передачи путём удлинения активной линии зацепления;
- обеспечения заданного межосевого расстояния;
- обеспечения двухпарного зацепления в полюсе и других целей.

3.10. Расчёт геометрических размеров зубчатых колёс

Исходными данными для расчёта размеров служат: числа зубьев колёс z_1 и z_2 , модуль колёс m , угол профиля исходного контура α , коэффициенты смещения x_1 и x_2 , коэффициент высоты головки зуба h_a^* и коэффициент радиального зазора c^* .

Угол зацепления

Формулу для определения угла зацепления приведём здесь без вывода из-за его громоздкости

$$\operatorname{inv} \alpha_w = \operatorname{inv} \alpha + \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Из этой формулы, в частности, видно, что в нулевой передаче ($x_1 + x_2 = 0$) угол зацепления α_w равен углу профиля инструмента α , в положительной передаче ($x_1 + x_2 > 0$) $\alpha_w > \alpha$, в отрицательной передаче всё наоборот, т.е. ($x_1 + x_2 < 0$) и соответственно $\alpha_w < \alpha$.

Радиусы начальных окружностей и межосевое расстояние

Для вывода формул обратимся к рис. 3.17, на котором показаны необходимые элементы зацепления. Линия зацепления N_1N_2 образует угол зацепления α_w с общей касательной к начальным окружностям радиусов r_{w1} и r_{w2} , касающимся друг друга в полюсе П. Опустив перпендикуляры из центров колёс O_1 и O_2 на линию за-

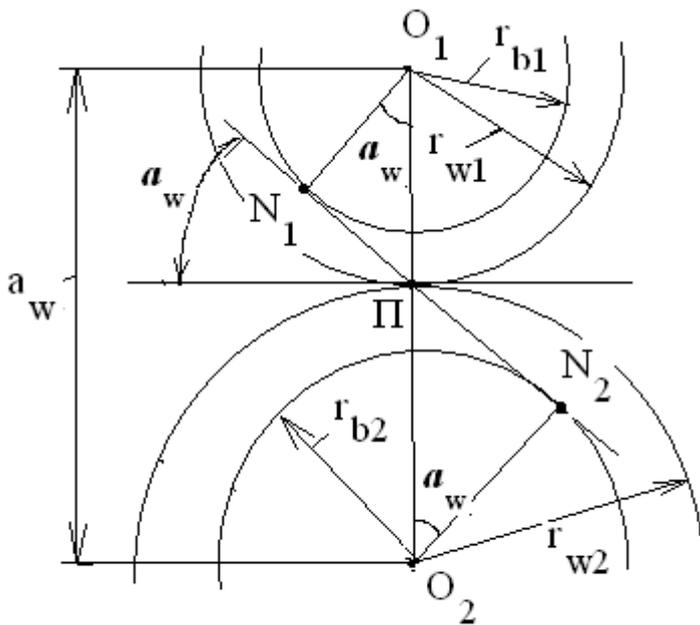


Рисунок 3.17

цепления, получаем два прямоугольных треугольника $N_1O_1\Pi$ и $N_2O_2\Pi$ с углами при вершинах O_1 и O_2 , равными α_w . Из треугольника

следует $N_1O_1\Pi$ $O_1\ddot{I} = \frac{O_1N_1}{\cos \alpha_w}$, из

треугольника $N_2O_2\Pi$

$O_2\ddot{I} = \frac{O_2N_2}{\cos \alpha_w}$. Так как имеют место

равенства $O_1\ddot{I} = r_{w1}$,

$O_1N_1 = r_{b1}$, $O_2\ddot{I} = r_{w2}$ и

$O_2N_2 = r_{b2}$, а также

$r_{b1} = r_1 \cdot \cos \alpha$, $r_{b2} = r_2 \cdot \cos \alpha$, то

получаем $r_{w1} = r_1 \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}$ и $r_{w2} = r_2 \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}$. Вместо радиусов делительных

окружностей r_1 и r_2 в эти формулы можно вставить их выражения, записанные ранее, тогда

$$r_{w1} = m \cdot \frac{z_1}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}, \quad r_{w2} = m \cdot \frac{z_2}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}.$$

Как видно из рисунка, межосевое расстояние равно сумме радиусов начальных окружностей, т. е. $a_w = r_{w1} + r_{w2}$, поэтому

$$a_w = m \cdot \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}.$$

Произведение первых двух слагаемых в этой формуле называется *делительным межосевым расстоянием*. Оно имеет место, когда передача изготавливается нулевой, т. е. когда суммарный коэффициент смещения равен нулю. При этом $\alpha_w = \alpha$, и косинусы сокращаются.

Радиусы окружностей впадин

При образовании нулевого колеса его центроидой, как всегда, является делительная окружность (рис.3.18), а центроидой инструмента служит его делительная прямая (на рисунке профиль инструмента и его делительная прямая и прямая вершин показаны тонкими линиями). Поэтому радиус r_{f0} окружности впадин нулевого

го колеса равен разности $r_{f0} = r - (h_a^* + c^*) \cdot m$. При смещении инструмента на величину xm радиус окружности впадин увеличивается на эту же величину и приобретает значение

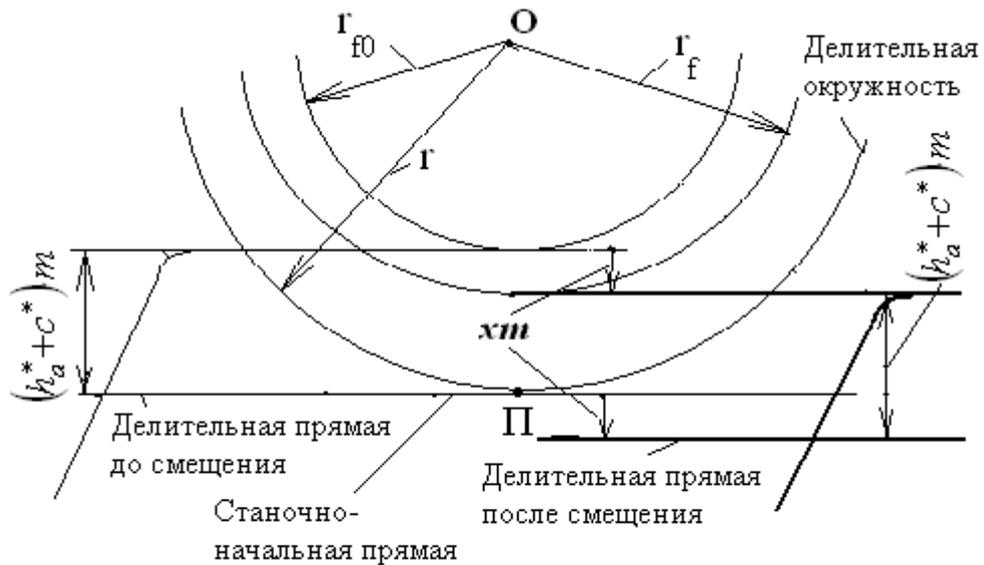


Рисунок 3.18

$$r_f = r + (h_a^* + c^*) \cdot m + x \cdot m.$$

На рис. 3.18 расположение инструмента по отношению к нарезаемому колесу изображено жирными линиями.

Радиусы окружностей вершин

Расчёт радиусов окружностей вершин понятен из рис. 3.19, где представлены те элементы зацепления, которые связаны с этим расчётом. Непосредственно из рисунка видно, что радиус окружности вершин первого колеса равен

$$r_{a1} = a_w - r_{f2} - c^* m,$$

радиус окружности вершин второго колеса равен

$$r_{a2} = a_w - r_{f1} - c^* m.$$

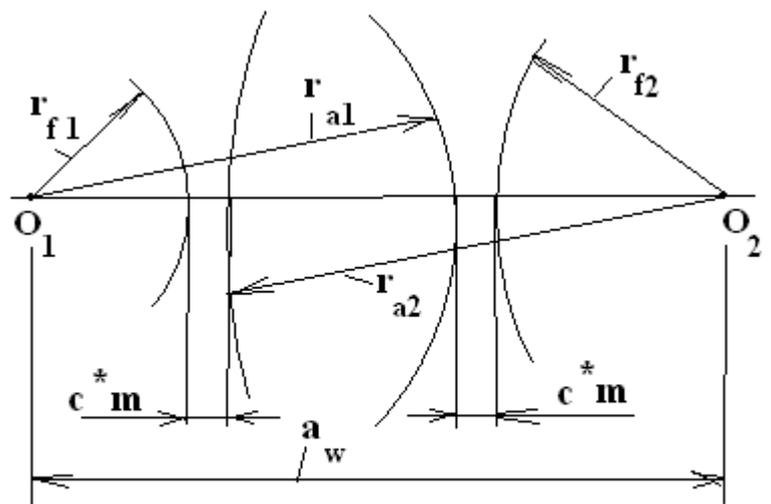


Рисунок 3.19

Толщина зуба по делительной окружности

Толщина зуба колеса по делительной окружности определяется шириной впадины инструментальной рейки по станочно-начальной прямой (Рис.3.20), которая при изготовлении колеса перекачивается по его делительной окружности без скольжения.

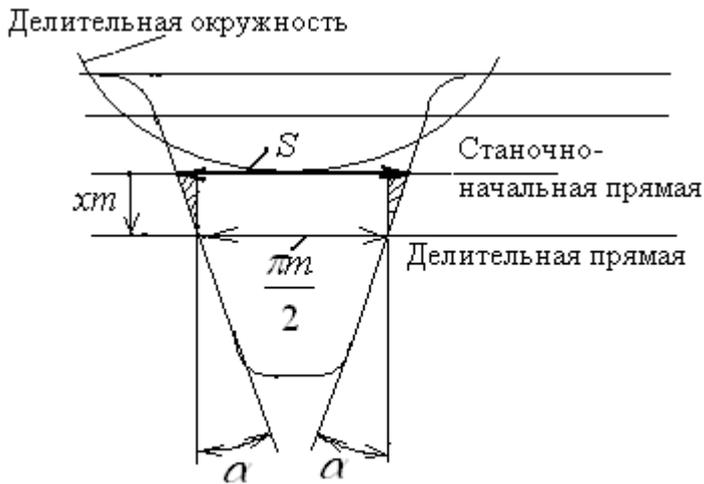


Рисунок 3.20

Размер S толщины зуба складывается из ширины $\frac{\pi m}{2}$

впадины инструментальной рейки по её делительной окружности и двух катетов прямоугольных треугольников, заштрихованных на рисунке 3.20, которые расположены на станочно-начальной прямой рейки. Вертикальные катеты этих треугольников равны xm , так как они представляют собой величину смещения инструмента от центра

колеса при его нарезании, что, по существу, равно расстоянию между делительной и станочно-начальной прямыми. Каждый горизонтальный катет прямоугольного треугольника равен $xm \cdot \operatorname{tg} \alpha$. С учётом этих соображений толщину зуба S можно выразить так

$$S = \frac{\pi m}{2} + 2xm \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

или в окончательном виде, после несложного преобразования

$$S = m \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2x \cdot \operatorname{tg} \alpha \right).$$

Во всех формулах расчёта геометрических размеров зубчатых колёс коэффициенты смещения необходимо подставлять со своими знаками.

Вопросы для самопроверки

1. В чём заключается существо основного закона зацепления?
2. Какие профили зубьев колёс называются сопряжёнными?
3. Что такое эвольвента окружности, производящая прямая?
4. Какими свойствами обладает эвольвента окружности?
5. Что такое эвольвентная функция?
6. Назовите элементы зубчатого колеса, какими линиями очерчивается профиль зуба?
7. Что называется шагом колеса, модулем, головкой, ножкой зуба?
8. В каком месте измеряется толщина зуба, ширина впадины колеса?

9. Какими свойствами обладает делительная окружность?
10. Что такое коэффициент высоты головки зуба, чему он равен?
11. Какая окружность колеса называется основной?
12. Назовите элементы зацепления пары колёс.
13. Что такое полюс зацепления?
14. Какие окружности колёс называются начальными?
15. Что такое угол зацепления?
16. Что такое линия зацепления, активная линия зацепления?
17. Что такое радиальный зазор, за счёт чего он образуется?
18. Сформулируйте свойства эвольвентного зацепления.
19. Какими методами изготавливают эвольвентные зубья, в чём заключается существо методов? Каковы основные достоинства и недостатки методов?
20. Что такое реечный производящий исходный контур(инструментальная рейка)?
21. Что такое подрез зубчатого колеса?
22. Какое число зубьев считается минимальным, от чего оно зависит?
23. Как предотвратить подрез зубчатого колеса?
24. Что такое коэффициент смещения исходного контура?
25. Какие зубчатые колёса называются нулевыми, положительными и отрицательными?
26. Назовите качественные характеристики эвольвентного зацепления.
27. Что называется коэффициентом перекрытия, и что он характеризует?
28. Что такое удельное скольжение, почему возникает скольжение в контакте зубьев?
29. Почему в полюсе зацепления удельное скольжение равно нулю?
30. Что такое коэффициент удельного давления, где он применяется?
31. Для чего назначаются коэффициенты смещения при нарезании зубчатых колёс?
32. Как определяются геометрические размеры зубчатых колёс: угол зацепления, радиусы начальных окружностей, межосевое расстояние, радиусы окружностей впадин, радиусы окружностей вершин и толщина зуба по делительной окружности?

4. Кинематика механизмов с низшими кинематическими парами

В этом разделе изучаются методы исследования кинематики *механизмов с низшими парами* (или *рычажных механизмов*).

4.1. Задачи исследования; исходные данные; методы исследования

Задачи исследования

- 1) Определение положений звеньев механизма и определение траекторий отдельных его точек.

2) Определение линейных скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев.

3) Определение линейных ускорений точек механизма и угловых ускорений его звеньев.

Исходные данные

Для решения задач кинематики необходимо иметь

1) Кинематическую схему механизма и все кинематические размеры его звеньев.

2) Закон движения входного (ведущего) звена.

Методы исследования

1) Аналитический.

2) Графо-аналитический (метод планов положений, скоростей и ускорений).

3) Метод графического дифференцирования.

4) Экспериментальный.

4.2. Аналитический метод

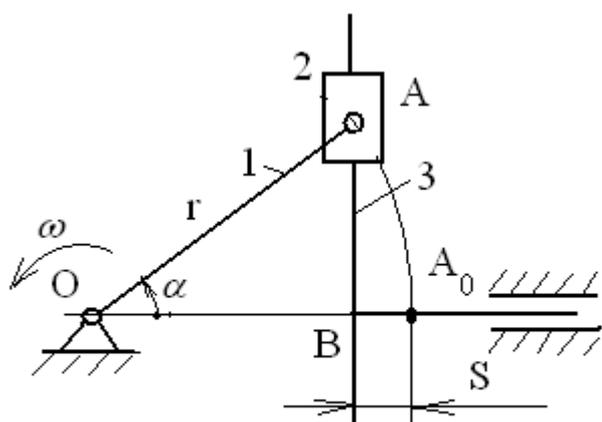


Рисунок 4.1

Метод заключается в определении математических выражений, описывающих функциональную связь между входными и выходными параметрами механизма. Для этого служат различные приёмы и методы, такие как метод векторных контуров, который образуется заменой кинематических размеров звеньев векторами, с последующим проецированием этого контура на оси системы координат и получением на этой основе соответствующих уравнений,

описывающих кинематику данного механизма. Этой же цели служит метод разбиения схемы механизма на прямо- или косоугольные треугольники, решая которые, получают необходимые математические выражения.

Для составления некоторого первоначального представления о методе рассмотрим кинематику *синусного механизма* (рис. 4.1). Механизм состоит из кривошипа 1, вращающегося вокруг неподвижной точки O, конец A которого образует вращательную кинематическую пару с ползуном 2. Ползун движется по вертикальному элементу ведомого звена 3, которое движется вдоль неподвижных горизонтальных направляющих. На первом этапе определяется зависимость перемещения S ведомого звена от угла α_1 поворота ведущего кривошипа 1. Из рис. 4.1 видно, что

$$S = OA_0 - OB = r - r \cdot \cos \alpha = r \cdot (1 - \cos \alpha).$$

Дифференцируя по α в первый раз, получаем аналог скорости ведомого звена:

$$S' = r \cdot \sin \alpha,$$

дифференцируя во второй раз, получаем аналог ускорения ведомого звена

$$S'' = r \cdot \cos \alpha.$$

З а м е ч а н и е . Следует обратить внимание на то, что зависимость $S = S(\alpha)$, отражающая закон преобразования движения в механизме, называется *функцией положения механизма*. Её первая производная по α , как отмечено выше, называется *аналогом скорости* (или *передаточной функцией скорости*), вторая производная – *аналогом ускорения* (или *передаточной функцией ускорения*). Для получения скорости и ускорения в функцию положения необходимо ввести время, для этого вместо α необходимо подставить ωt и выполнить дифференцирование по времени t . Попутно обнаруживается и связь между кинематическими функциями и их аналогами.

4.3. Метод планов положений, скоростей и ускорений

Определение функции положения

При использовании графоаналитического метода определение функции положения механизма производится с помощью разметки механизма. *Разметка механизма* – это ряд последовательных положений механизма, построенный в зависимости от положений входного звена, охватывающих весь цикл его движения (как правило, один оборот).

Каждый механизм в соответствии с его кинематической схемой имеет свои особенности в построении разметки. Разметка строится в некотором масштабе, начиная от одного из крайних положений, отмечаемого нулевым номером. Затем окружность, описываемая концом входного звена (кривошипа), делится на двенадцать равных частей, которые обозначаются номерами в направлении угловой скорости.

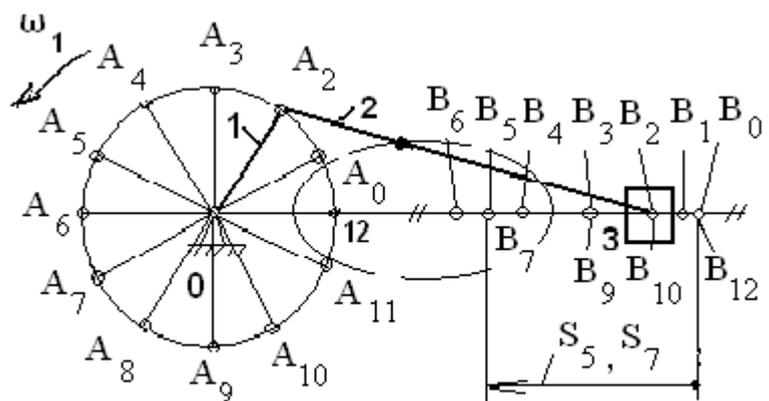


Рисунок 4.2

После этого строятся положения остальных звеньев механизма, и строятся траектории заданных точек.

Для примера на рис. 4.2 приведена разметка кривошипно – ползунного механизма, с помощью которой легко определить путём измерений перемещение точки В ведомого звена, соответствующие углам поворота кривошипа, и представить их в виде графика или таблицы. Это и будет функция положения механизма.

З а м е ч а н и е о м а с ш т а б е . Масштабом называется число, показывающее, сколько единиц физической величины содержится в одном миллиметре её изображения. В механике машин в масштабе изображаются любые физические величины: угол поворота, время, перемещение, скорость, сила, работа, мощность и т. д. Масштаб обозначается буквой μ с индексом обозначения физи-

ческой величины и имеет размерность в виде дроби, в числителе которой указывается размерность изображаемой физической величины, в знаменателе – миллиметры. Например: $\mu_l = 0,002 \frac{\dot{i}}{\ddot{i}}$ – масштаб длин читается: ноль целых,

две тысячных метра в одном миллиметре (изображения); $\mu_t = 2 \frac{\tilde{n}}{\ddot{i}}$ – масштаб времени, читается: две секунды в одном миллиметре.

Определение скоростей и ускорений

Планом скоростей (ускорений) механизма называется пучок векторов, выходящих из одной точки (полюса плана), каждый из которых в некотором масштабе изображает вектор абсолютной скорости (абсолютного ускорения) какой-либо точки механизма, а отрезки, соединяющие их концы, изображают векторы относительных скоростей (относительных ускорений).

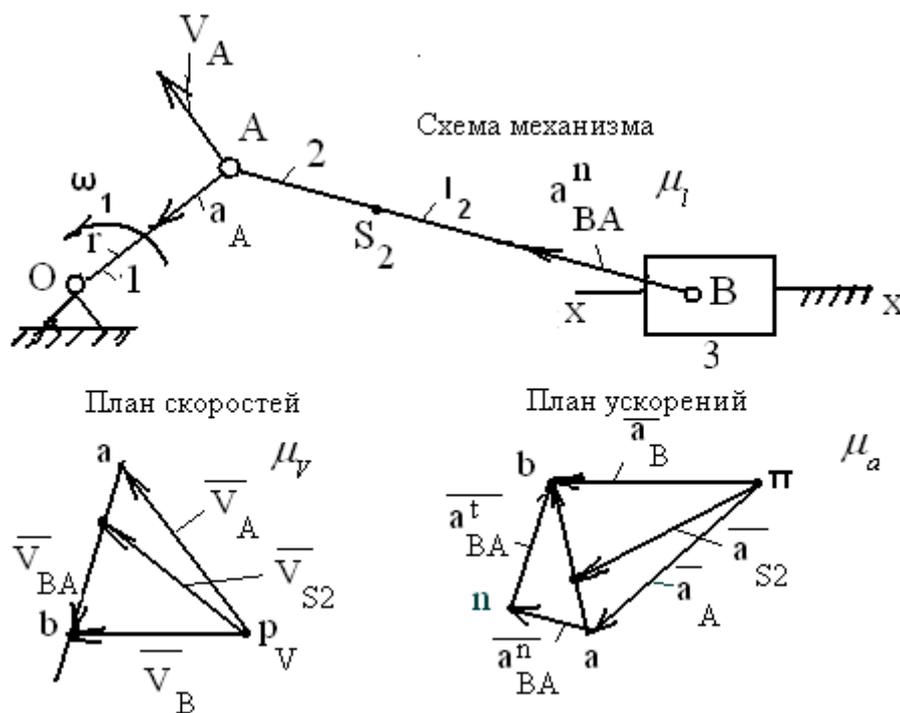


Рисунок 4.3

Построение плана скоростей сводится к реализации известного положения теоретической механики, согласно которому при плоско-параллельном движении твёрдого тела (звена) скорость любой его точки равна векторной сумме скорости в поступательном переносном движении вместе с другой точкой, принятой в качестве полюса, и скорости её в относительном вращательном движении относительно этого полюса.

Рассмотрим построение планов скоростей и ускорений на примере кривошипно-ползунного механизма (рис. 4.3). Схема механизма должна быть

изображена в масштабе $\mu_l = \dots \frac{\dot{i}}{\ddot{i}}$ в исследуемом положении. Прежде необходимо определить параметры движения точки А. Её скорость по величине равна

произведению угловой скорости ω_1 кривошипа 1 на его радиус r_1 , т. е. $V_A = \omega_1 \cdot r_1$ и направлена перпендикулярно кривошипу в сторону движения точки А. Ускорение точки А по величине равно произведению квадрата угловой скорости кривошипа также на его радиус, т. е. $a_A = \omega_1^2 \cdot r_1$ и направлено от точки А к точке О, так как совпадает с нормальной составляющей полного ускорения точки А из-за равенства нулю тангенциальной составляющей ускорения (угловое ускорение кривошипа принимается равным нулю). Точка А принадлежит не только кривошипу, но и шатуну 2 и принимается в качестве полюса относительного вращения точки В. Скорость точки В определяется векторным равенством $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$, т. е. скорость точки В равна скорости точки А плюс скорость точки В относительно точки А. В этом равенстве первое слагаемое правой части известно по величине и по направлению, второе слагаемое направлено перпендикулярно шатуну 2 в данном положении, т. е. известно по направлению, и, наконец, вектор левой части направлен параллельно направляющим ползуна. При этих условиях треугольник скоростей легко строится в предварительно выбранном масштабе $\mu_V = \dots \frac{i\tilde{n}^{-1}}{\ddot{i}}$.

Построение плана ускорений производится в той же последовательности, что и план скоростей. При этом используется векторное равенство $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$, в котором первый вектор правой части известен полностью, второй неизвестен ни по величине, ни по направлению. Вектор левой части известен по направлению – он направлен параллельно направляющим ползуна. В этих условиях треугольник ускорений не строится. Разложим вектор относительного ускорения на две составляющих, согласно равенству $\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t$. Первое слагаемое представляет собой относительное нормальное ускорение, направленное от точки В к точке А и равное по величине частному от деления квадрата относительной скорости на длину шатуна, т. е. $a_{BA}^n = \frac{V_{BA}^2}{l_2}$. Второе слагаемое, относительное тангенциальное ускорение направлено перпендикулярно шатуну 2 и неизвестно по величине. Теперь план ускорений строится без затруднений с применением заранее выбранного масштаба $\mu_a = \dots \frac{i\tilde{n}^{-2}}{\ddot{i}}$. Планы скоростей и ускорений данного механизма представлены на рис. 4.3.

Используя планы, легко найти физические величины скоростей и ускорений, для этого необходимо измерить отрезки в миллиметрах, выражающие скорости и ускорения, и умножить их на соответствующий масштаб.

$$\text{Абсолютная скорость точки В: } V_B = \overline{p_V b} \cdot \mu_V, \quad i\tilde{n}^{-1}.$$

$$\text{Относительная скорость точки В: } V_{BA} = \overline{ab} \cdot \mu_V, \quad i\tilde{n}^{-1}.$$

Угловая скорость шатуна 2: $\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_2}, \tilde{n}^{-1}$.

Тангенциальное ускорения точки В относительно точки А:

$$a_{BA}^{\tau} = \overline{nb} \cdot \mu_a, i\tilde{n}^{-2}.$$

Полное относительное ускорение: $a_{BA} = \overline{ab} \cdot \mu_a, i\tilde{n}^{-2}$.

Угловое ускорение шатуна 2: $\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^{\tau}}{l_2}, \tilde{n}^{-2}$.

4.4. Метод кинематических диаграмм (метод графического дифференцирования)

Основой метода служит известное положение математики, согласно которому производная функции, заданной в виде графика, в какой-либо её точке численно равна тангенсу угла наклона касательной, проведённой в этой точке к графику функции, то есть

$$y'_i = \left(\frac{dy}{dx} \right)_i = \text{tg } \theta_i.$$

Так как теория механизмов и машин имеет дело с именованными числами, то при определении величины тангенса необходимо учитывать масштабы по осям координат графика функции (рис. 4.4), тогда

$$y'_i = \text{tg } \theta_i \cdot \frac{\mu_y}{\mu_x}.$$

Выберем горизонтальный отрезок произвольной длины и проведём из его левого конца наклонную прямую, параллельную касательной, а из правого конца – вертикальную прямую до пересечения с наклонной. Вычислим длину отрезка, полученного на вертикали и обозначенного на рис. 4.4 буквой \overline{k}_i . Построенный треугольник является прямоугольным с углом против вертикального катета, равным θ_i . Поэтому, записав из тре-

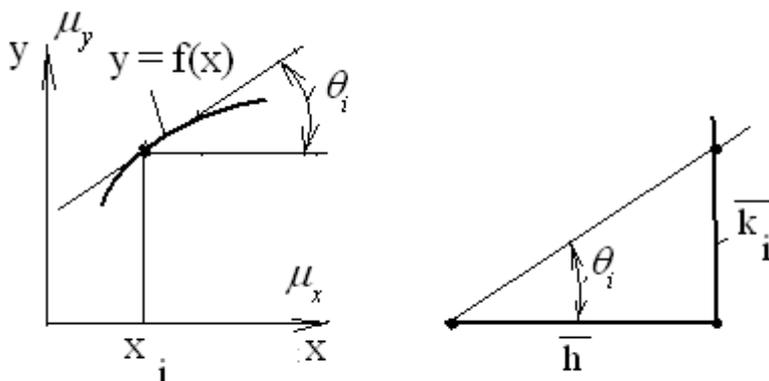


Рисунок 4.4

угольника $\text{tg } \theta_i = \frac{\overline{k}_i}{h}$ и подста-

вив это отношение в предыдущее выражение, получаем

$$y'_i = \frac{\overline{k}_i}{h} \cdot \frac{\mu_y}{\mu_x}.$$

В правой части этого выражения переменной величиной является только \overline{k}_i , остальные

образуют постоянное число, которое можно считать масштабом, то есть

$$\mu_{y'} = \frac{\mu_y}{h \cdot \mu_x}$$

Таким образом мы убедились, что отрезок \overline{k}_i в масштабе $\mu_{y'}$ выражает производную в данной точке графика.

Для применения рассмотренной методики необходимо предварительно построить график или функции положения механизма, или график аналога скорости. Чтобы построить график производной, необходимо на продолжении оси абсцисс этого графика в левую сторону от оси ординат выбрать произвольный отрезок \overline{h} и на нём строить все треугольники, необходимые для определения отрезков \overline{k}_i . Все эти отрезки получаются на оси ординат, но каждый из них необходимо разместить на ординатной прямой соответствующего номера, а их концы соединить плавной кривой. Эта процедура даст искомый график.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте задачи кинематического анализа механизмов с низшими парами.
2. Перечислите методы исследования кинематики механизмов.
3. Что должно быть задано для исследования кинематики механизма?
4. В чём заключается сущность аналитического метода исследования кинематики?
5. Что называется масштабом в ТММ?
6. Что такое разметка механизма?
7. Для чего строится разметка?
8. Как определяются скорость и ускорение конца кривошипа?
9. Запишите векторные уравнения для построения планов скоростей и ускорений и объясните их составляющие. Какое правило механики положено в основу этих уравнений?
10. Как определяются скорости и ускорения центра масс шатуна?
11. Как определить угловую скорость и ускорение стержневого звена?
12. Какое правило математики положено в основу графического дифференцирования функции, заданной в виде графика?
13. Приведите пример построения графика производной при заданном графике функции.
14. Как определяются масштабы по осям координат при построении графика производной?

5. Кинетостатика механизмов

В этом разделе изучаются силы, действующие на звенья механизмов. Из-за ограниченности объёма данной работы здесь рассматриваются только механизмы с низшими кинематическими парами. Задачами этого раздела являются следующие.

1) Определение реакций в кинематических парах механизмов с целью их использования в дальнейшем для прочностных расчётов звеньев и элементов кинематических пар, сил трения, КПД и т. д.

2) Определение уравновешивающей силы или уравновешивающего момента на ведущем звене.

Для решения этих задач необходимо знать

1) кинематическую схему механизма и кинематические размеры его звеньев.

2) массы и моменты инерции звеньев.

3) внешние силы, действующие в машинах (применительно к технологическим машинам должны быть известны силы полезного, т. е. технологического сопротивления, применительно к машинам-двигателям необходимо знать движущие силы).

5.1. Расчёт сил инерции

Расчёт сил инерции относится к предварительному расчёту, предшествующему основной задаче определения реакций в кинематических парах.

Силы инерции возникают во всех случаях, когда звенья движутся непрямолинейно и/или неравномерно. Рассмотрим три вида движения звеньев.

Поступательное движение звена

Этот вид движения чаще всего относится к ползунам, движущимся относительно прямолинейных направляющих (рис. 5.1). Пусть при этом m – это масса ползуна, a – его ускорение.

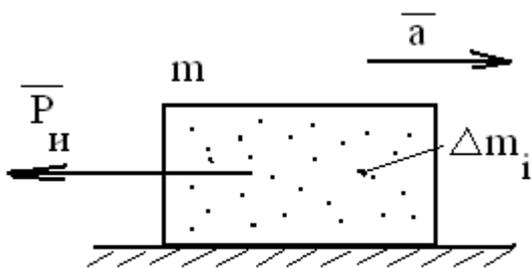


Рисунок 5.1

Сила инерции элементарной массы звена $\Delta \vec{P}_{\dot{e}_i} = -\Delta m_i \cdot \vec{a}$. Если просуммировать все элементарные силы инерции данного ползуна, т. е. найти сумму $\sum \Delta \vec{P}_{\dot{e}_i} = -\sum \Delta m_i \cdot \vec{a}$, то получится главный вектор сил инерции звена, равный $\vec{P}_{\dot{e}} = -m \cdot \vec{a}$. То есть главный вектор сил инерции, или *просто сила инерции звена* в его поступательном движении равна массе звена, помноженной на его ускорение.

Знак «минус» в правой части формулы указывает на противоположность направления силы инерции по отношению к ускорению.

Вращательное движение звена

В этом движении находятся кривошипные, кулисы, коромысла и другие звенья механизмов. Возьмём стержневое звено ОА (рис. 5.2), вращающееся вокруг неподвижной точки О.

Масса звена равна m , момент инерции относительно центра масс S равен J_S . Вращение происходит с угловой скоростью ω и угловым ускорением ε . Расстояние между центром масс и центром вращения равно ρ_S .

Вычислим ускорение, с которым движется центр масс S . Его нормальное ускорение равно $a_S^n = \rho_S \cdot \omega^2$, тангенциальное ускорение равно $a_S^t = \rho_S \cdot \varepsilon$. Так как эти составляющие полного ускорения перпендикулярны друг другу, то полное ускорение равно $a_S = \rho_S \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. В результате наличия этого ускорения возникает сила инерции, приложенная в центре масс, направленная противоположно ускорению центра масс

$$\vec{P}_e = -m \cdot \vec{a}.$$

Угловое ускорение звена вызывает появление инерционного момента (или момента сил инерции), направленного по отношению к нему в противоположную сторону

$$\vec{M}_e = -J_O \cdot \vec{\varepsilon}.$$

В этой формуле момент инерции принимается относительно центра вращения и определяется формулой $J_O = J_S + m \cdot \rho_S^2$.

Частные случаи

1. $\rho_S = 0 \rightarrow \vec{P}_e = 0, \vec{M}_e \neq 0.$
2. $\varepsilon = 0 \rightarrow \vec{M}_e = 0, \vec{P}_e \neq 0.$
3. $\rho_S = 0, \varepsilon = 0 \rightarrow \vec{P}_e = 0, \vec{M}_e = 0.$

Плоско-параллельное движение звена

Такое движение совершают чаще всего шатуны механизмов. На рис. 5.3 изображён шатун, совершающий такое движение. Масса шатуна равна m , момент инерции относительно центра масс равен J_S .

Звено движется, имея угловое ускорение ε и ускорение центра масс a_S . Аналогично вращательному движению в этом случае также будут действовать оба инерционных фактора: сила инерции $\vec{P}_e = -m \cdot \vec{a}_S$, противоположная ускорению, и момент сил инер-

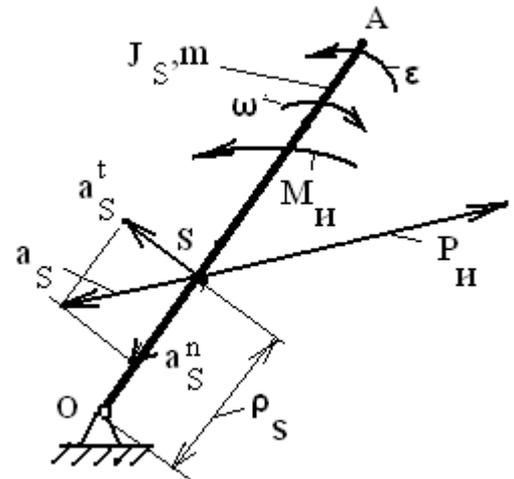


Рисунок 5.2

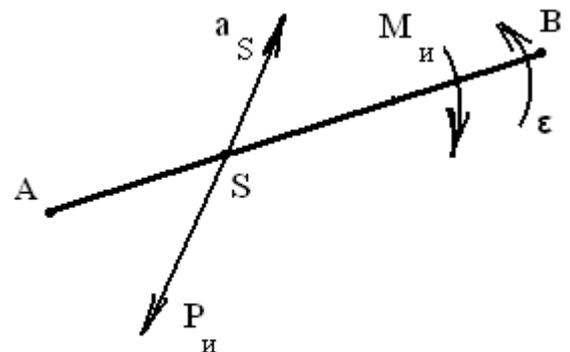


Рисунок 5.3

ции $\vec{M}_e = -J_S \cdot \vec{\varepsilon}$, противоположный угловому ускорению.

5.2. Общие положения силового расчёта

Принцип Даламбера

Силовой расчёт механизмов выполняется на основе принципа Даламбера, позволяющего рассматривать подвижные системы, к которым относятся механизмы, как неподвижные, находящиеся в равновесии. Принцип Даламбера можно сформулировать так: *если к системе сил, действующих на подвижную систему, добавить силы инерции, то такую систему можно рассматривать как находящуюся в равновесии, и к ней применимы законы статики.*

Принцип освобожденности

Если рассматривать механизм в целом, то имеющаяся в каждой кинематической паре, согласно принципу равенства действия и противодействия, пара сил (реакций), действующих по одной линии действия и равных по величине, уравнивается и на равновесие механизма в целом не влияет. Так что даже в простом механизме определить эти реакции невозможно – они не войдут в уравнения равновесия. Для определения реакций необходимо механизм расчленить на части, каждая из которых была бы статически определима и в которой неизвестные реакции входили бы в число внешних сил и в уравнения равновесия.

Статическая определимость групп Ассур

В кинематических парах пятого класса, будь то поступательная или вращательная пара, реакция характеризуется тремя параметрами: величиной, направлением и точкой приложения. Причём в поступательной паре реакция направлена перпендикулярно направляющей, т.е. известна по направлению. Два других параметра неизвестны. Во вращательной паре реакция проходит через центр шарнира, т.е. известна её точка приложения. Два других параметра также неизвестны. Таким образом, в любой кинематической паре пятого класса имеются два неизвестных. Согласно положениям теоретической механики для твёрдого тела (в том числе и для звена механизма) можно в плоскости составить три уравнения равновесия. Для статической определимости системы звеньев необходимо равенство количества уравнений равновесия и количества неизвестных в них, то есть

$$3n = 2p_5.$$

Это равенство совпадает с условием существования группы Ассур, следовательно, *группа Ассур является статически определимой кинематической цепью*, и силовой расчёт механизмов производится по группам Ассур.

5.3. Метод планов сил для определения реакций в кинематических парах Силовой расчёт группы Ассура

Рассмотрим группу Ассура второго класса второго вида, состоящую из шатуна 2 и ползуна 3 (рис. 5.4,а) и входящую в состав, например, кривошипно-ползунного механизма, одного из самых простых четырёхзвенных механизмов.

Группа изображается в масштабе $\mu_l = \dots \frac{\dot{i}}{\ddot{i}}$. На ползун 3 действует внешняя сила P_3 и сила инерции ползуна $P_{\epsilon 3}$, на шатун действуют сила инерции $P_{\epsilon 2}$, приложенная в точке S_2 , и момент сил инерции $M_{\epsilon 2}$.

Крайними кинематическими парами группы Ассура являются вращательная пара в точке А и поступательная пара ползуна 3 со стойкой. Отбрасывая кривошип 1 и стойку 0, освобождаем группу Ассура от связей и вместо них прикладываем неизвестные реакции R_{12} в точке А и R_{03} в поступательной паре, проведя её линию действия через точку В перпендикулярно направляющей. Отброшенные звенья показаны на схеме штриховыми линиями.

Записываем уравнение равновесия всей группы в целом в векторной форме:

$$\vec{P}_3 + \vec{R}_{03} + \vec{P}_2 + \vec{R}_{12} = 0.$$

В правой части этого уравнения стоит нуль, указывающий на равновесие. В этом уравнении первый вектор известен по величине и по направлению, второй известен по направлению, третий известен по величине и по направлению, четвёртый неизвестен совсем. Уравнение в таком виде не может быть решено, так как в нём три неизвестных параметра, а необходимо только два. Для сокращения количества неизвестных разложим вектор \vec{R}_{12} на составляющие, одну из которых, \vec{R}_{12}^{τ} , направим перпендикулярно шатуну 2 и назовём тангенциальной составляющей.

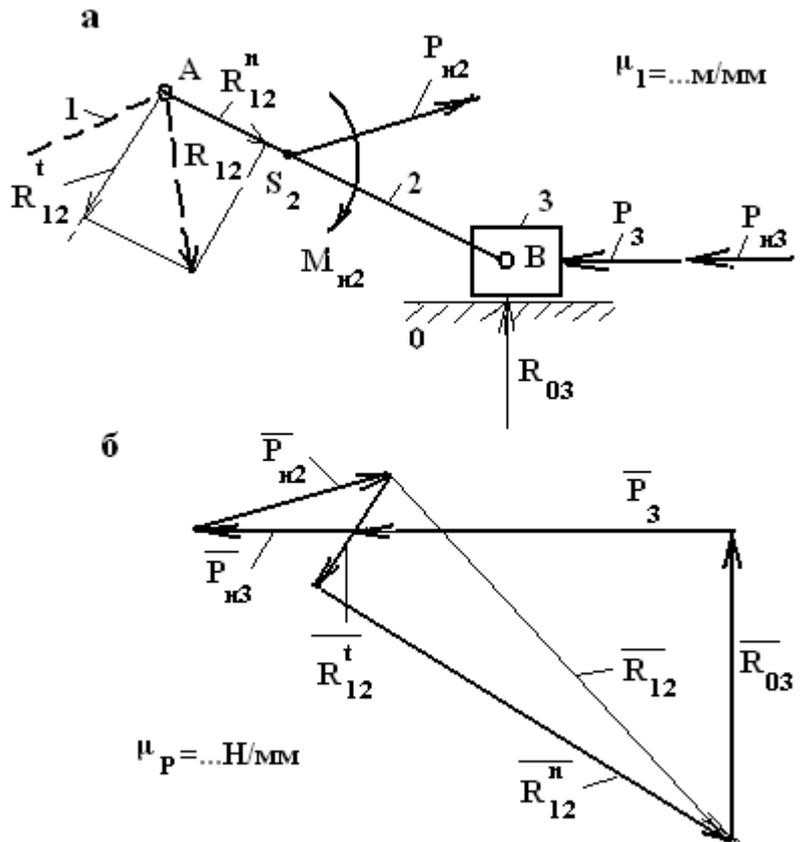


Рисунок 5.4

Вторую, $\overrightarrow{R_{12}^n}$, направим вдоль шатуна и назовём нормальной составляющей. Данная операция соответствует равенству $\overrightarrow{R_{12}} = \overrightarrow{R_{12}^\tau} + \overrightarrow{R_{12}^n}$. Составляющая $\overrightarrow{R_{12}^\tau}$ определяется из уравнения равновесия шатуна 2 в форме моментов сил относительно точки В:

$$R_{12}^\tau \cdot l_2 + M_2 - P_2 h_2 = 0,$$

из которого имеем $R_{12}^\tau = \frac{P_2 \cdot h_2 - M_2}{l_2}$. Размеры плеч в этих выражениях измеряются в миллиметрах (mm) на схеме механизма и с помощью масштаба переводятся в натуральную величину. Причём плечо h_2 есть кратчайшее расстояние линии действия силы $P_{\epsilon 2}$ от точки В.

Если результат расчёта по приведённому выражению оказывается отрицательным, то в дальнейшем направление R_{12}^τ следует принять обратным по отношению к принятому на схеме. Составляющая R_{12}^n и реакция R_{03} определяются путём построения векторного многоугольника сил (рис. 5.4,б). Для определения реакции во вращательной паре В между шатуном и ползуном необходимо построить на основе уравнения равновесия план сил шатуна 2 отдельно от ползуна 3 (или ползуна 3 отдельно от шатуна 2). Например, уравнение равновесия шатуна 2 запишется так:

Если результат расчёта по приведённому выражению оказывается отрицательным, то в дальнейшем направление R_{12}^τ следует принять обратным по отношению к принятому на схеме. Составляющая R_{12}^n и реакция R_{03} определяются путём построения векторного многоугольника сил (рис. 5.4,б). Для определения реакции во вращательной паре В между шатуном и ползуном необходимо построить на основе уравнения равновесия план сил шатуна 2 отдельно от ползуна 3 (или ползуна 3 отдельно от шатуна 2). Например, уравнение равновесия шатуна 2 запишется так:

$$\overrightarrow{R_{12}} + \overrightarrow{P_{\epsilon 2}} + \overrightarrow{R_{32}} = 0.$$

В этом уравнении первые два вектора известны полностью, третий вектор определится построением треугольника сил.

Силовой расчёт кривошипа

Как и в случае группы Ассур, необходимо прежде составить расчётную схему, приложив известные силы (рис. 5.5,а). В точке А прикладывается реакция со стороны отброшенного шатуна $\overrightarrow{R_{21}}$, которая равна и противоположна найденной выше реакции $\overrightarrow{R_{12}}$. В центре масс кривошипа прикладывается сила инерции, равная по величине $P_{\epsilon 1} = m_2 \cdot \rho_{S1} \cdot \omega_1^2$ и направленная к точке А (это соответствует постоянству угловой скорости ω_1 кривошипа).

В точке О кривошипа действует реакция $\overrightarrow{R_{01}}$ со стороны стойки, которую необходимо определить. Кроме того, к кривошипу необходимо приложить так называемый *уравновешивающий момент* $M_{\delta\delta}$, действующий на него со стороны машины-двигателя, приводящей в движение данную машину. Вместо уравновешивающего момента можно приложить *уравновешивающую силу* $P_{\delta\delta}$, задав точку её

приложения, а направление выбрав произвольным. Выбор между уравновешивающими моментом и силой зависит от способа передачи движения от двигателя к технологической машине. Если этот способ в задаче не оговорен, то расчётчик (студент) делает выбор по своему усмотрению. Остановимся здесь на выборе уравновешивающего

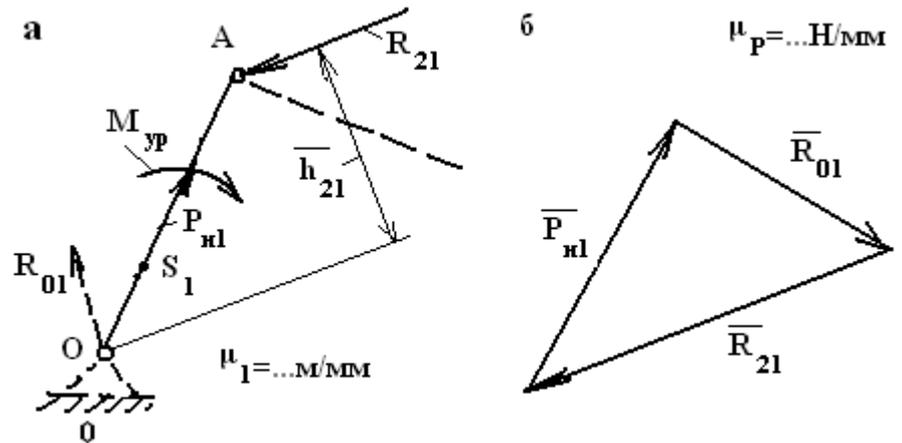


Рисунок 5.5

момента. Определим величину этого момента, составив уравнение равновесия кривошипа в форме моментов сил относительно точки O: $M_{\delta\delta} - R_{21} \cdot h_{21} = 0$, из которого ясно, что $M_{\delta\delta} = R_{21} \cdot h_{21}$. Для нахождения реакции $\overline{R_{01}}$ строится план сил согласно приведённому выше уравнению (рис. 5.5,б). Если приложить к кривошипу вместо уравновешивающего момента уравновешивающую силу, то она войдёт в векторное уравнение равновесия и повлияет на реакцию $\overline{R_{01}}$.

5.4. Определение уравновешивающей силы способом Н.Е. Жуковского

Способ основан на принципе возможных перемещений: *если система сил находится в равновесии, то сумма элементарных работ на возможных перемещениях точек приложения этих сил равна нулю*. Можно поделить все работы на бесконечно малый отрезок времени, за который они совершаются, тогда можно заменить элементарные работы на мгновенные мощности и сформулировать принцип так: *если система сил находится в равновесии, то сумма мгновенных мощностей этих сил равна нулю*, то есть

$$\sum N_i + N_{\delta\delta} = 0.$$

Под знаком суммы в первом слагаемом представлены мгновенные мощности внешних сил, второе слагаемое – мгновенная мощность уравновешивающей силы. Пусть имеется некоторая точка i какого-либо звена механизма, движущаяся со скоростью V_i , как показано на рис. 5.6. В этой точке приложена внешняя сила P_i , образующая угол δ_i с направлением скорости. Мгновенная мощность этой силы вычисляется по формуле: $N_i = P_i \cdot V_i \cdot \cos \delta_i$. Повернём вектор скорости $\overline{V_i}$ на 90° в любую сторону и переместим вдоль линии её действия так, чтобы она своим концом упиралась в точку i . Опустим перпендикуляр из начала повернутого век-

тора скорости на линию действия силы. Длина этого перпендикуляра $\overline{h}_i = \overline{V}_i \cdot \cos \delta_i$. Если выражение мощности

$$\mu_V = \dots \frac{\dot{i} \cdot \tilde{n}^{-1}}{\dot{i}\ddot{i}}, \text{ т. е. } P_i \cdot \frac{V_i}{\mu_V} \cdot \cos \delta_i = P_i \cdot \overline{h}_i,$$

то, как видно в правой части выражения, произведение силы на плечо даёт момент M_i этой силы относительно начала повернутого на 90° вектора скорости точки приложения силы. Следовательно, мгновенную мощность силы можно представить как её момент относительно повернутого вектора скорости точки приложения. Такую операцию можно выполнить с любой внешней силой, тогда вместо равенства нулю мощностей можно записать равенство нулю моментов: $\sum M_i + M_{\dot{\delta}} = 0$. Из этого

вытекает следующее положение: *если механизм находится в равновесии, то его повернутый на 90° в любую сторону план скоростей с приложенными к нему в соответствующих точках внешними силами как условный жёсткий рычаг также находится в равновесии.*

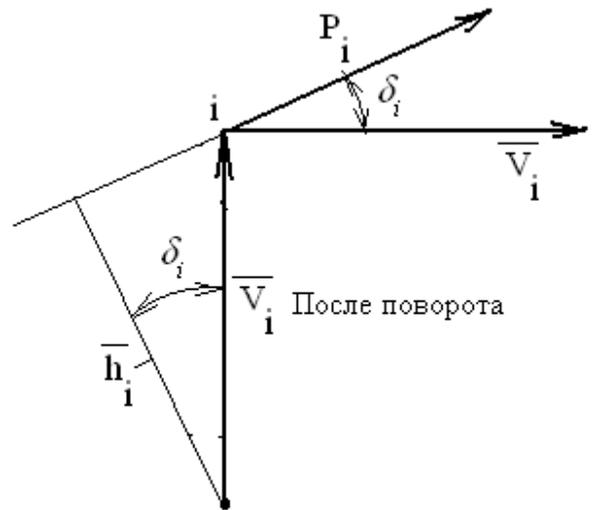


Рисунок 5.6

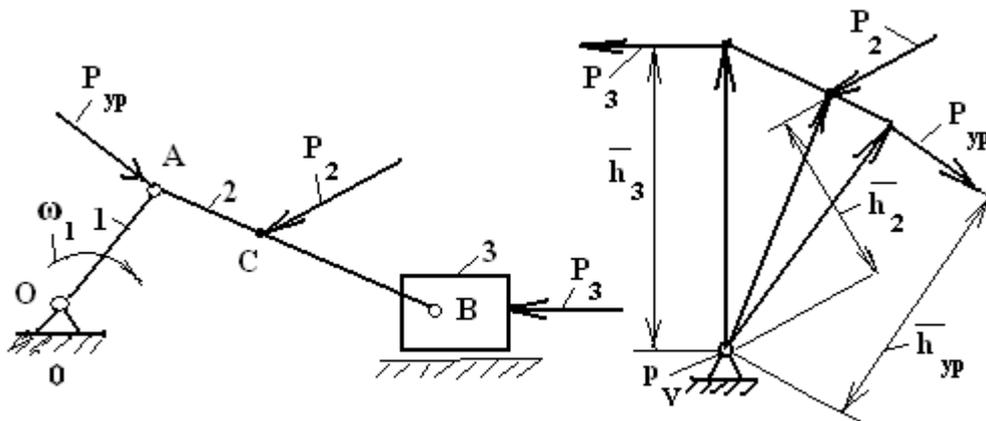


Рисунок 5.7

Это положение позволяет определить уравновешивающую силу.

Для решения задачи возьмём кривошипно-ползунный механизм в произвольном положении и приложим к нему две силы, как показано на рис. 5.7. Построим повернутый на 90° план скоростей и на концы векторов точек приложения сил перенесём данные силы, сохраняя их заданные направления. К концу вектора скорости точки A кривошипа приложим уравновешивающую силу перпендикулярно кривошипу. Записав уравнение равновесия плана скоростей, как жёсткого рычага, в форме моментов относительно полюса плана, имеем

$$P_3 \cdot \overline{h}_3 + P_2 \cdot \overline{h}_2 - P_{\dot{\delta}} \cdot \overline{h}_{\dot{\delta}} = 0,$$

откуда $P_{\acute{o}\grave{d}} = P_2 \cdot \frac{\overline{h_2}}{h_{\acute{o}\grave{d}}} + P_3 \cdot \frac{\overline{h_3}}{h_{\acute{o}\grave{d}}}$. Чёрточки над обозначениями плеч указывают на

то, что они берутся в виде отрезков с плана сил. Их перевод в натуральные величины не требуется, так как отношение плеч от масштаба не зависит.

Вопросы для самопроверки

1. Что является основной задачей кинетостатики механизмов?
2. Какие данные должны быть известны для решения задач кинетостатики?
3. В чём заключается принцип Даламбера?
4. В чём заключается принцип освобожденности?
5. Объясните принцип равенства действия и противодействия в кинематических парах.
6. Какие параметры сил известны и какие неизвестны в кинематических парах?
7. Какие кинематические цепи являются статически определимыми и почему?
8. В каких случаях возникают силы инерции в механизмах?
9. К чему сводится расчёт инерционных воздействий в различных случаях движения звеньев в плоскости? Привести необходимые формулы.
10. В какой последовательности выполняется силовой расчёт механизма?
11. Перечислите методы силового расчёта механизмов.
12. Составьте уравнение равновесия группы Ассур второго класса любого вида в векторной форме.
13. Как определяются тангенциальные составляющие реакций?
14. В чём особенность силового расчёта ведущего кривошипа?
15. Что такое уравновешивающий момент (уравновешивающая сила)? Из какого условия он (она) определяется?
16. В чём отличие определения реакции в кинематической паре кривошипа со стойкой при действии на него уравновешивающего момента или уравновешивающей силы?

6. Динамика машин

Основными задачами этого раздела являются определение фактической угловой скорости ведущего звена и определение момента инерции маховика, необходимого для поддержания изменения угловой скорости в заданных пределах.

6.1. Вспомогательные задачи динамики машин

Динамическая модель машины

В связи с необходимостью упрощения расчётной схемы и большей наглядности, а также сокращения расчётов реальную машину заменяют её моделью, сохраняющей те свойства машины, которые изучаются на данном этапе исследования. Такая модель представляет собой некоторый условный диск, вращающийся с кривошипом как одно целое, т. е. с его угловой скоростью (рис. 6.1), обладающий так называемым *приведённым моментом инерции*. На этой основе кривошип или другое ведущее звено, с которым связан условный диск, называется *звеном приведе-*

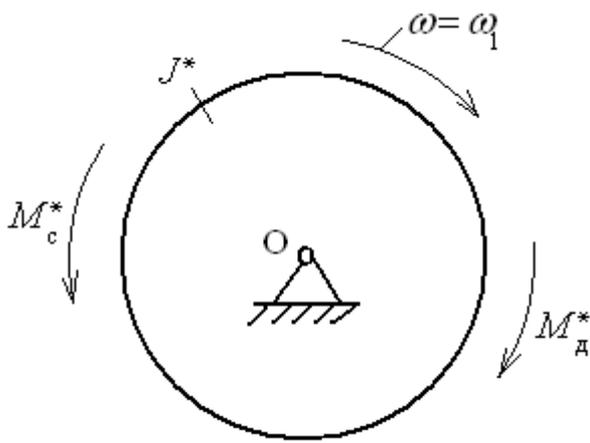


Рисунок 6.1

ния. На диск действуют *приведённый момент движущих сил*, направленный в сторону вращения, и *приведённый момент сил сопротивления*, направленный навстречу вращению.

На схеме рис. 6.1 обозначены J^* - приведённый момент инерции механизма, $M_{\ddot{a}}^*$ - приведённый момент движущих сил и $M_{\ddot{n}}^*$ - приведённый момент сил сопротивления.

Приведённый момент инерции

Приведённым моментом инерции механизма называется момент инерции условного диска, которым заменяется реальный механизм, обладающего кинетической энергией, равной сумме кинетических энергий всех звеньев механизма.

Кинетическая энергия условного диска $T^* = \frac{1}{2} J^* \omega^2$, где $\omega = \omega_1$, т. е. угловая скорость звена приведения, равная угловой скорости кривошипа.

Кинетическая энергия звена, совершающего поступательное движение, $T_i = \frac{1}{2} m_i V_i^2$, где m_i - масса звена, V_i - скорость звена.

Кинетическая энергия звена, совершающего вращательное движение, $T_j = \frac{1}{2} J_j \omega_j^2$, где J_j - момент инерции звена, ω_j - угловая скорость звена.

Кинетическая энергия звена в плоскопараллельном движении $T_k = \frac{1}{2} m_k V_{S_k}^2 + \frac{1}{2} J_{S_k} \omega_k^2$, где m_k - масса звена, V_{S_k} - скорость центра масс звена, J_{S_k} - момент инерции звена относительно его центра масс, ω_k - угловая скорость звена. Согласно определению имеем:

$$T^* = \sum T_i + \sum T_j + \sum T_k.$$

Подставив сюда записанные выше выражения кинетических энергий и, решая затем полученное равенство относительно J^* , запишем

$$J^* = \sum m_i \left(\frac{V_i}{\omega} \right)^2 + \sum J_j \left(\frac{\omega_j}{\omega} \right)^2 + \sum m_k \left(\frac{V_{S_k}}{\omega} \right)^2 + \sum J_{S_k} \left(\frac{\omega_k}{\omega} \right)^2.$$

Как видно из этой формулы, приведённый момент инерции зависит от структуры механизма, от массовых характеристик звеньев, от положения механизма и не зависит от угловой скорости ведущего звена. Некоторые механизмы имеют постоянное значение приведённого момента инерции. Машины, в основе которых механизмы с $J^* = const$, называются *ротативными*.

Приведённый момент сил сопротивления

Приведённым моментом сил сопротивления называется момент, приложенный к звену приведения, мгновенная мощность которого равна сумме мгновенных мощностей всех сил сопротивления, действующих в механизме.

Мгновенная мощность приведённого момента сопротивления $N_{\tilde{n}}^* = M_{\tilde{n}}^* \cdot \omega$. Мгновенная мощность i -той силы сопротивления $N_i = P_i \cdot V_i \cdot \cos \delta_i$. Согласно определению $N_{\tilde{n}}^* = \sum N_i$, поэтому, подставив сюда соответствующие выражения, получаем $M_{\tilde{n}}^* \cdot \omega = \sum P_i \cdot V_i \cdot \cos \delta_i$, откуда

$$M_{\tilde{n}}^* = \sum P_i \cdot \frac{V_i}{\omega} \cdot \cos \delta_i.$$

Если среди сил сопротивления имеются моменты, то их можно представить в виде пар сил с плечами, равными длинам соответствующих звеньев.

З а м е ч а н и е . Если во всех математических выражениях заменить силы сопротивления движущими силами, то в результате получится приведённый момент движущих сил:

$$M_{\tilde{a}}^* = \sum P_i \cdot \frac{V_i}{\omega} \cdot \cos \delta_i.$$

Зависимость приведённых моментов сил от угла поворота, скорости или времени называется *механической характеристикой машины*.

6.2. Характеристика режимов движения машин

Анализ динамики машин производится на основе теоремы об изменении кинетической энергии системы: *изменение (приращение) кинетической энергии системы на её возможном перемещении равно сумме работ всех внешних и внутренних сил на этом перемещении*, то есть

$$T_{i+1} - T_i = A_{\tilde{a}_{i,i+1}} + A_{\tilde{n}_{i,i+1}},$$

где T_i – кинетическая энергия системы в данный момент времени; T_{i+1} – кинетическая энергия системы в последующий момент времени; $A_{\tilde{a}_{i,i+1}}$ – работа движущих сил при перемещении системы из i -го до $i+1$ -го положения системы;

$A_{\tilde{n},i+1}$ – работа сил сопротивления на том же перемещении системы. Сумма работ в правой части равенства называется *избыточной работой* $A_{e\zeta}$.

В зависимости от соотношения величин правой части этого равенства различают следующие режимы (виды) движения машин.

I. Неустановившийся режим

А) *Пуск (разбег)*. Этот режим имеет место при соотношении работ $|A_{\ddot{a}}| > |A_{\tilde{n}}|$ или $A_{e\zeta} > 0$. Тогда в левой части имеет место соотношение $T_{i+1} > T_i$, т. е. кинетическая энергия машины возрастает, и возрастает угловая скорость ω . Графически это можно представить как на рис. 6.2.

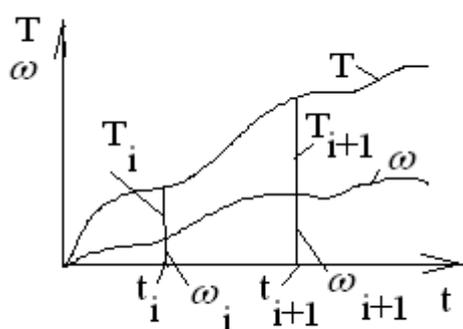


Рисунок 6.2

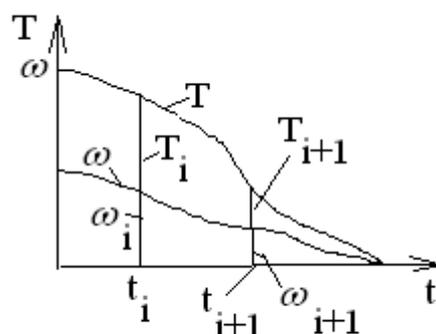


Рисунок 6.3

Б). *Остановка (выбег)* имеет место при обратном соотношении работ, т. е. $|A_{\ddot{a}}| < |A_{\tilde{n}}|$ и $A_{e\zeta} < 0$. При этом кинетическая энергия машины убывает, и угловая скорость также убывает. Графически этот режим представлен на рис. 6.3. Оба режима не являются рабочими, так как не могут продолжаться долго. Режим пуска заканчивается, когда угловая скорость начинает повторять свои значения, а режим остановки заканчивается полной остановкой машины. При исследовании этих режимов, кроме закона изменения угловой скорости, определяется время пуска или, соответственно, остановки.

II. Установившийся режим

А) *Неравновесный*. Режим характеризуется тем, что работа движущих сил то больше, то меньше работы сил сопротивления, т. е. в течение цикла имеют место следующие соотношения $|A_{\ddot{a}}| > |A_{\tilde{n}}|$ и $|A_{\ddot{a}}| < |A_{\tilde{n}}|$. Но за цикл работы машины эти величины одинаковы $|A_{\ddot{a}}|_{\text{за цикл}} = |A_{\tilde{n}}|_{\text{за цикл}}$, так что в начале и в конце цикла $A_{e\zeta} = 0$.

В результате таких соотношений работ кинетическая энергия машины и угловая скорость ведущего звена в течение цикла изменяются периодически, причём

средние значения как кинетической энергии, так и угловой скорости остаются постоянными.

Графический характер изменения кинетической и угловой скорости приведен на рис. 6.4. Средняя скорость определяется с помощью

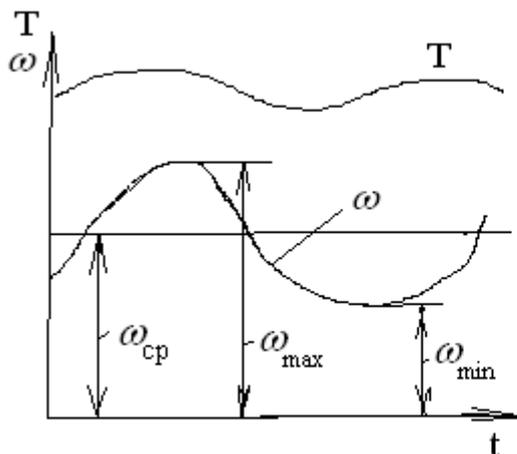


Рисунок 6.4

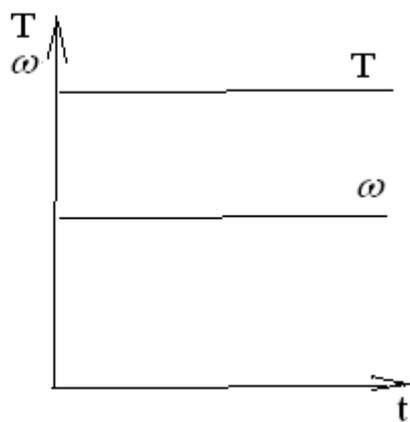


Рисунок 6.5

нными. Численно коэффициент δ равен $\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{сп}}}$.

$\omega_{\text{пд}} = \frac{1}{2}(\omega_{\max} + \omega_{\min})$. Величина, характеризующая отклонение максимальной и минимальной угловой скорости от её среднего значения, называется *коэффициентом неравномерности* δ . Численно коэффициент δ равен $\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{пд}}}$.

Для поддержания изменения угловой скорости в заданных пределах в машинах применяют маховики, представляющие собой колёса с массивным ободом, устанавливаемые на вал ведущего звена и вращающиеся с его угловой скоростью.

Данный режим является рабочим, так как может продолжаться неопределённо долго. В этом режиме работают все машины циклического действия.

Б) *Равновесный*. Этот режим имеет место в тех машинах, в которых работа движущих сил постоянно равна работе сил сопротивления, т. е. $|A_{\dot{a}}| = |A_{\dot{n}}|$. Избыточная работа в течение всего цикла равна нулю, $A_{\text{еc}} = 0$. Кинетическая энергия и угловая скорость остаются постоянными (рис. 6.5).

Такой режим работы характерен для ротативных машин.

6.3. Уравнения движения машин

Уравнение движения в интегральной форме

Основой для вывода уравнения служит соотношение между работой и энергией, вытекающее из теоремы об изменении кинетической энергии системы: $\Delta T = A_{\text{еc}}$, которое можно представить в виде равенства $T - T_0 = A_{\dot{a}} - A_{\dot{n}}$. В этом равенстве: T — текущее значение кинетической энергии, T_0 — начальное значение кинетической энергии, $A_{\dot{a}}$ — работа движущих сил, выполненная от начального до

текущего момента времени, $A_{\dot{n}}$ – работа сил сопротивления, выполненная за то же время.

Величины энергий и работ определяются следующими равенствами:

$$T_0 = \frac{1}{2} J_0^* \omega_0^2, \quad T = \frac{1}{2} J^* \omega^2, \quad A_{\ddot{a}} = \int_{\alpha_0}^{\alpha} M_{\ddot{a}}^*(\alpha) d\alpha, \quad A_{\dot{n}} = \int_{\alpha_0}^{\alpha} M_{\dot{n}}^*(\alpha) d\alpha.$$

Подставляя эти выражения в вышезаписанное равенство, получаем окончательный вид уравнения:

$$\frac{1}{2} J^* \omega^2 - \frac{1}{2} J_0^* \omega_0^2 = \int_{\alpha_0}^{\alpha} M_{\ddot{a}}^*(\alpha) d\alpha + \int_{\alpha_0}^{\alpha} M_{\dot{n}}^*(\alpha) d\alpha.$$

В правой части уравнения подынтегральные выражения представляют собой функции от угла поворота кривошипа, т.е. перемещения. Это значит, что данные функции могут быть определены, только если внешние силы также зависят от перемещений. Данное обстоятельство определяет область применения уравнения в интегральной форме.

Уравнение в дифференциальной форме

Внешние силы, действующие в машинах, могут зависеть не только от перемещений, но и от скоростей, и от времени. В этих случаях уравнение в интегральной форме неприменимо. Для исследования динамики таких машин применяют более универсальное уравнение – уравнение в дифференциальной форме. Оно может быть получено из уравнения в интегральной форме путём дифференцирования по α .

$$\frac{1}{2} \frac{dJ^*}{d\alpha} \omega^2 + \frac{1}{2} J^* 2\omega \frac{d\omega}{d\alpha} = M_{\ddot{a}}(\alpha, \omega, t) + M_{\dot{n}}(\alpha, \omega, t).$$

Сделав замену $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$ и затем, выполнив несложные преобразования, полу-

чим окончательно
$$\frac{dJ^*}{d\alpha} \cdot \frac{\omega^2}{2} + J^* \frac{d\omega}{dt} = M_{\ddot{a}}(\alpha, \omega, t) + M_{\dot{n}}(\alpha, \omega, t).$$

Первое слагаемое левой части представляет собой момент сил инерции, как следствие изменения J^* . Второе слагаемое представляет также момент сил инерции, но как результат изменения ω .

6.4. Назначение и приближённое определение момента инерции маховика

Маховик служит для уменьшения колебаний величины угловой скорости ведущего звена, уменьшения угловых ускорений и, в конечном итоге, инерционных воздействий. Этот эффект, называемый *кинематическим*, тем больше, чем больше момент инерции маховика. Кинематический эффект тесно связан с *динамическим*,

который заключается в том, что маховик выступает как *аккумулятор кинетической энергии*. Он накапливает кинетическую энергию в те промежутки времени, когда возрастает его угловая скорость, принимая на себя часть избыточной работы, которая в этом случае не тратится на разгон машины. При уменьшении угловой скорости маховик отдаёт часть накопленной энергии, помогая движущим силам выполнять полезную работу и препятствуя существенному уменьшению угловой скорости. Некоторые машины, например машины ударного действия, без такой помощи не смогли бы функционировать.

Для расчёта момента инерции маховика примем допущение, что максимальный перепад кинетической энергии машины, численно равный максимальному перепаду избыточной работы, поглощается маховиком. Для иллюстрации этого служит рис. 6.6. Допущение здесь заключается в том, что часть кинетической энергии поглощается звеньями механизма, чем мы пренебрегаем. Обозначим перепад избыточной работы $\Delta A_{\text{из}}$. Согласно принятому допущению эта величина

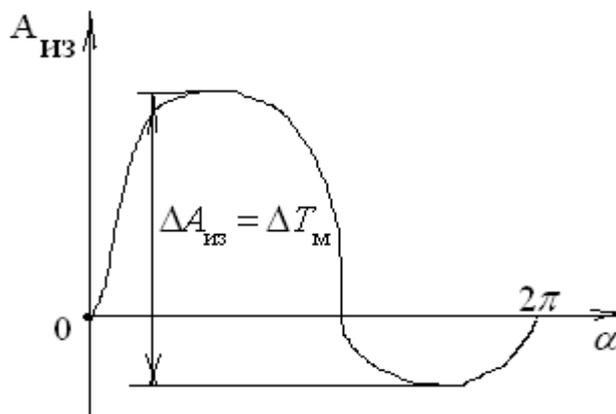


Рисунок 6.6

составляет разность между максимальным и минимальным значениями кинетической энергии маховика:

$$\Delta T_i = T_i^{\max} - T_i^{\min},$$

то есть

$$\Delta A_{\text{из}} = \Delta T_i.$$

Максимальная величина кинетической энергии маховика вычисляется по формуле

$$T_i^{\max} = \frac{1}{2} J_i \omega_{\max}^2,$$

минимальная величина вычисляется по формуле

$$T_i^{\min} = \frac{1}{2} J_i \omega_{\min}^2.$$

Поэтому разность этих величин даёт выражение

$$\Delta T_i = \frac{1}{2} J_i (\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2).$$

Разложив разность квадратов в скобках на множители и заменив последние их выражениями, полученными из приведенных выше формул для вычисления $\omega_{\text{п}\delta}$ и δ , получаем

$$(\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) = (\omega_{\max} + \omega_{\min})(\omega_{\max} - \omega_{\min}) = 2\delta\omega_{\text{п}\delta}^2.$$

Объединяя результаты выкладок, запишем $\Delta T_i = J_i \delta \omega_{\text{н\ddot{o}}}^2$ и $\Delta A_{\text{е\grave{c}}} = J_i \delta \omega_{\text{н\ddot{o}}}^2$, откуда окончательно получаем

$$J_i = \frac{\Delta A_{\text{е\grave{c}}}}{\delta \omega_{\text{н\ddot{o}}}^2}.$$

Как видно из этой формулы, достичь полного постоянства угловой скорости невозможно, так как для этого необходимо иметь бесконечно большой маховик (требуется $\delta = 0$). Ясно также, что увеличение скорости вращения маховика ведёт к уменьшению его массы и размеров, поэтому целесообразно маховик устанавливать на более быстроходный вал.

Вопросы для самопроверки

1. Какие задачи решаются при исследовании динамики машин?
2. Что представляет собой динамическая модель машины?
3. Что называется приведённым моментом инерции механизма?
4. Что называется приведённым моментом сил?
5. Какая теорема механики положена в основу уравнений динамики машин?
6. Как записать кратчайшую форму уравнения динамики?
7. Какие существуют виды (режимы) движения машин?
8. Чем характеризуются пуск, остановка и установившийся режим работы машин?
9. Что такое коэффициент неравномерности движения машины?
10. Как определяется средняя величина угловой скорости ведущего звена?
11. Для чего предназначен маховик в машине?
12. Какое допущение принято для приближённого определения момента инерции маховика?
13. В чём заключается кинематический и динамический эффект действия маховика?
14. Как определяется момент инерции маховика?

Библиографический список

1. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. М., 1988. 640 с.
2. Фролов К.В., Попов С.А., Мусатов А.К. и др. Теория механизмов и машин / Под ред. К.В.Фролова. М., 1987. 496 с.
3. Юдин В.А., Петрокас Л.В. Теория механизмов и машин. М., 1977. 527 с.
4. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин. М., 1979. 576 с.
5. Крайнев А.Ф. Словарь-справочник по механизмам. М., 1981. 438 с.
6. Кореняко А.С. Теория механизмов и машин. Киев, 1976. 444 с.
7. Левитская О.Н., Левитский Н.И. Курс теории механизмов и машин. М., 1976. 269 с.

